

中国科学院研究生教学丛书



数学物理中的渐近方法

李家春 周显初 编著

科学出版社

6

中国科学院研究生教学丛书

数学物理中的渐近方法

李家春　周显初　编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书讲述渐近分析和摄动方法的基本理论，其中包括：渐近积分的Laplace方法、驻相法、最陡下降法、求微分方程渐近解的主项平衡法、WKB方法、摄动展开的PLK方法、匹配渐近展开法、多重尺度法等. 本书强调同科学研究和工程实践的结合，分别讨论了理论在波动、稳定性、流动问题中的应用. 书中还专门论述摄动级数改进的理论和实用方法. 本书是一本适合研究生使用的应用数学教材. 书中包括了作者多年的研究成果，可供力学、声学、光学、理论物理、大气动力学、物理海洋学、地球物理学、应用数学等专业的研究人员、工程师、高等学校的教师和高年级学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理中的渐近方法/李家春，周显初编著.-北京：科学出版社，1998.2

（中国科学院研究生教学丛书/路甬祥，叶朝辉主编）

ISBN 7-03-006109-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①李… ②周… Ⅲ.渐近方法-应用-数学物理方程 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第11986号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年2月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1998年2月第一次印刷 印张：12⅜
印数：1—2 000 字数：324 000

定价：24.50元

中国科学院研究生教学丛书总编委会

物理学科编委会

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了. 相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量. 我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生. 当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级

人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作. 由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

目　录

绪　　言

“数学物理中的渐近方法”是我们在研究生院开设的一门应用性较强的数学课程，也可以说是数学物理方法的续篇. 在现代科学研究中，主要是理论分析工作中，这类方法应用得相当普遍，它几乎已经成为力学、大气动力学、海洋动力学、声学、光学和其它物理专业研究人员必不可少的数学工具. 在近期文献中，使用这类方法来解决一些重大的基础理论和工程实际问题也并不罕见. 可以毫不夸张地说，如果不懂得这一方面的基本知识，从事上述领域的研究工作，阅读近期文献就会有一定困难. 然而，在我们的高等数学课程中，这些内容恰恰是被忽视了的，或者说是十分欠缺的，往往有这样的情况：一个学生成绩很好，但到了工作岗位遇到实际问题时却束手无策. 这不能不使人联想到高等学校的数学教学问题，似乎令人有科学研究与工程实际脱节之感. 为了使数学教学与今后的科学研究工作有机地衔接起来，我们准备用 80 学时的时间来讲授这门课程，并编写了这本教材.

在开始学习这门课程以前，我们首先要搞清这门课程的性质，根据我们的理解，从两个方面来说明这个问题：

1. 渐近分析是理论研究中进行近似计算有效方法

在科学研究的开始阶段，由于受到生产力发展，人的认识水平与数学工具的限制，人们往往仅局限于线性问题. 也就是说，迭加原理适用的那一类问题，经过近三百年的发展，对这类问题已经有一系列非常成熟的方法了. 即使如此，也只是对于一些理想化的问题 (简单几何形状，均匀各向同性介质) 才能获得少量的精确解. 在这些精确解中，还有相当一部分是用级数积分，特殊函数表达的. 研究人员为了要从中得到一些有用的科学结论，工程师为了要把结果用于具体的工程设计，就必须要依靠近似方法计算出具体的数值来，这是渐近分析的任务之一.

随着生产力发展的需要，人们必须深入到非线性问题的研究领域中去. 以力学学科为例，正如钱伟长教授在“关于非线性力学”一文中指出的，本世纪 40 年代人造纤维与塑料的问世 (它们的本构关系是非线性的)，航空工业采用薄的固体材料 (因而产生大变形)，飞机飞行速度要突破“声障” (跨声速方程)，这就是非线性力学出现的工业与生产背景. 在非线性领域中，还出现了许多线性问题中所没有发现的新现象：解对振幅的依赖关系；解的畸变；间断和孤立子现象；唯一性的破坏和对称的破缺 (分岔)；内在随机性 (混沌) 等等. 在这一领域中，由于叠加原理不适用了，原先那一套数学方法失效了，我们必须寻找新的途径. 渐近方法中的奇异摄动理论是解决弱非线性问题行之有效的手段之一. 它不仅可用于局部分析，有时亦可帮助我们了解全局行为. 航空航天事业的发展是一个最明显的例子，为了要计算升力与阻力，即便是今天对 Navier-Stokes 方程，用最先进的计算机求解完整飞机的绕流也是不可能的，Prandtl 的边界层理论 (1904)，升力线理论 (1925) 促进了航空工业的发展，这不能不归功于渐近分析，因此，边界层理论是渐近分析的范例.

当然，电子计算机的革命使数值模拟成为科学研究的重要途径，理论分析常常要与数值模拟方法结合起来解决某一具体问题. 但是，数值模拟不能完全代替理论分析. 相反地，只有在理论分析指导下的数值模拟，才能克服计算中遇到的有关收敛性、稳定性、奇异性的困难，才能得到一些真正有价值的结果. 何况，在某些场合，还非得用理论分析方法不可，譬如：要准确计算高速振荡的积分，计算光波的传播 (波长要比通常的特征长度短得多)，采用驻相法，几何光学近似可以有事半功倍之效.

有人以为近似解不如精确解好. 如果我们能做到这一点当然是好的. 从另一方面讲，我们在归纳数学问题时就或多或少地作了近似，我们的方程只是真实物理世界的近似描摹. 所以，求近似方程的精确解并不比求近似方程的近似解更有意义，只要我们能做到误差在工程允许范围内就可以了.

2. 渐近分析是应用数学的重要分支

自古以来，数学的发展是与人类的生产实践活动紧密相关的. 即使到了 17 世纪牛顿时代，纯粹数学与应用数学也没有明确的界限. 当时，为了研究天体运行的规律，迫切需要确定瞬时速度，切线、弧长等概念，因此，Newton, Leibniz 创立了微积分学. 在 Newton 的经典著作三卷本《自然哲学的数学原理》中，数学理论是与解决质点运动、流体力学和潮汐等问题紧密联系的. 同样地，当时变分法的出现是以力学中 Maupertuis 的最小作用量原理和光学中 Fermat 原理为动力的. 从 19 世纪起，由于数学的严密化，以 Bolzano,Cauchy 为代表的一批数学家开始用逻辑推理的方法来建立完整的体系，出现了函数论和非欧几何的一些分支，纯粹数学与应用数学开始分道扬镳了. 20 世纪，由于数学研究对象的一般化，在 Cantor 无限集合概念的基础上，形成了近世代数，拓扑学和泛函分析等现代数学分支. 为了说明应用数学特点，我们用下面几个例子来说明：

1. 1807 年，Fourier 在《热的解析理论》一书中，提出了一个解决数学物理问题的一般方法. 譬如：对于热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\qquad(0<x<\pi)\tag{1}$$

$$T(0,t)=T(\pi,t)=0\tag{2}$$

$$T(x,0)=f(x)\tag{3}$$

它的解可表达成级数形式

$$T(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}b_j\sin\ jxe^{-a^2j^2t}\tag{4}$$

式中，b_j 为 $f(x)$ 展开成正弦级数的 Fourier 系数：

$$b_j=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\tau)\sin\ j\tau d\tau\tag{5}$$

虽然这种方法有很大实际意义，法国科学院于 1812 年授于 Fourier 大奖. 但 Laplace, Legendre, Lagrange 却指责他在数学上不严格.

而恰恰也是 Fourier 的这种“不严格”的真知灼见是数学物理中的重要方法，而且为抽象的集合论， Hilbert 空间提供了理论基础. Lord Kelvin 称 Fourier 的这个发现为“最伟大的数学诗篇”.

2. 19 世纪下半叶，电机工程师 Heaviside 创立了一套符号法则来求解电工学中的微分方程，叫运算微积法. 他规定了符号 p 的代数运算与微分，积分运算间的对应关系：

$$p^n\widetilde{x} \Longleftrightarrow \frac{d^n}{dt^n}x \tag{6}$$

$$\frac{\widetilde{x}}{p^n} \Longleftrightarrow \int\int\int x\cdots dt \tag{7}$$

这样一来，解微分方程

$$\frac{dx}{dt} - x = 1 \tag{8}$$

就相当于解代数方程

$$(p-1)\widetilde{x} = 1 \tag{9}$$

即

$$\widetilde{x} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots) \tag{10}$$

由于 $\dfrac{1}{p^n} \Longleftrightarrow \dfrac{t^n}{n!}$, 所以

$$x = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{11}$$

这样就得到了方程 (8) 的解

$$x = e^t - 1 \tag{12}$$

这种方法既然没有考虑初始条件, 往往会导致错误的结果. 直到 1920 年，由 Bromwich 等人把复变函数中的积分变换方法同它联系起来以后，才使这种方法具备了坚实的理论基础.

3. 本世纪开始使用的 Dirac δ 函数也是为了研究物理问题中的集中现象的需要而产生的，直到 50 年代，才形成了分布与广义函数的理论.

所以，应用数学的首要特征是它同自然科学和工程实际的紧密联系．现在，它已渗透到经济学、生态学等更广泛的领域；其次是它不像纯粹数学那样靠逻辑推理来进行研究的，所以有一个从不严格到建立完整理论体系的过程．正如“一个不亲自检查桥梁每一部分坚固性就不过桥的旅行者不可能走远的”那样，在数学中，有些事情必须冒险，这就说明应用数学存在的必要性．为了防止出现偏差，我们有一个很好的检验可靠性方法，那就是同实验、同实际情况作比较．

现在，我们对什么是应用数学看得更清楚了．“应用数学是连接纯粹数学和科学技术的桥梁．”(W. Prager) 通过这座桥梁，一方面将来自生产实践的数学理论问题提供给纯粹数学家；另一方面，它将现有的数学研究成果应用于解决实际问题．这种比喻是非常恰当的．

根据应用数学的性质，应用数学工作者的任务是

(1) 用数学语言来归纳、描述科学问题；

(2) 用现有方法或创造新方法来解决数学问题；

(3) 阐释解的物理意义；

不要认为只是第二步才是重要的，第一、三两步既是必不可少，也不是轻而易举的．由于来源于某一学科的数学问题与其它学科的数学问题间具有很大的相似性，我们还要做最后一步工作，即

(4) 通过一般化，建立新的数学分支．

这本数学物理中的渐近方法，经过较长时间的发展，可以说达到第四步了，所以，它已有点同一般的数学课程相像了．但大家一定不要忘记它是从应用数学中刚刚脱胎出来的，它还带有应用数学的许多特征，所以，也一定要用研究应用数学的方法和观点来学习它．希望大家把重点放在了解出现这种数学理论的物理背景和应用这种方法的技巧上，而不要把重点放在过分地追究严格性和逻辑性上．每个读者要熟悉一门学科领域，并努力把学到的知识用到这一学科的科学研究中去．为了熟练运算技巧，多做一些习题也是十分

必要的. 复变函数与微分方程是学习这门课程所必备的基础知识.

目前, 国际上有关渐近理论与摄动方法的书籍大体上有两类: 一类以 Bender 和 Orszag 的高等应用数学方法 (1978) 和 Nayfeh 的摄动法 (1973) 为代表. 主要讨论数学方法和技巧, 但一个明显的缺陷是没有使用有物理背景的实际例子, 所以, 对于从事物理领域研究的学生来说, 由于不知问题如何归纳, 方程如何导出, 在科学研究中遇到实际问题往往仍然束手无策. 另一类是以 Van Dyke 的摄动法及其在流体力学中的应用 (1975) 为代表. 主要以物理问题为红线来讨论摄动方法. 这样做虽然比较直观, 但数学理论不够系统与完整, 没有讨论渐近分析, 经验成分较多, 不利于提高学生的数学理论基础. 本书的著者, 统观了目前渐近方法的教学状况, 在编写教材时, 注意发扬本学科现有书籍的优点, 弥补其不足, 体现了理论与实用并重的特色: 既然渐近分析已成为一门应用数学的分支学科, 我们必须要注意理论的完整性, 应尽量涉及有重要理论意义与实际应用的诸方面. 如: 既讨论了渐近分析, 又讨论了摄动法; 既涉及积分的渐近展开, 也涉及了方程 (包括微分与差分方程) 的渐近解; 既进行局部分析, 也进行全局分析; 在研究级数求和时, 补充了发散级数理论. 在必要的地方, 必须有严格的证明, 使学生注意理论的严谨性. 另一方面, 我们又强调本学科的实用性. 所以, 本书的安排是理论与应用部分相互交替的, 所给出的例子不是抽象的, 而是从实际问题中提炼出来的数学问题. 这样做, 不仅使学生懂得了相关领域内的物理概念, 如: 色散, 相速度和群速度, 几何光学和物理光学, 线性与非线性波, 流动稳定性, 量子力学等等. 还学会了如何直接将物理现象归纳成数学问题, 并求分析解的方法. 本书无意灌输这一领域的全部知识, 而将注意力放在培养学生分析能力上. 所以本书详略适度, 在着重阐明本学科若干最基本的概念和方法后, 对那些在学习本课程后, 可以自学读懂的, 非基本的内容, 一概省略. 更重要的是, 使学生学会处理非标准的, 无准确解的数学物理问题的方法和哲理, 以及求近似解和近似结果的技巧, 从而

提高他们独立科学研究的能力.

“数学物理中的渐近方法”共分两大部分：第一部分是渐近分析，包括渐近级数，积分的渐近展开，微分方程的渐近解，WKB方法，级数的分析与改进等内容，除了WKB方法外，多数是属于局部分析的范畴. 第二部分是奇异摄动理论，这也是我国与华裔科学家作出过较大贡献的学科领域. 这一部分介绍了匹配渐近展开法，变形坐标法，多重尺度法，平均法等方面. 与第一部分不同的是，它是属于全局分析的范畴. 应用的领域涉及波动，稳定性，粘性流，气泡运动等方面. 本书将原讲义很多内容作了更新，尤其是包含了作者近十年来的研究工作新成果. 本书一至六章及第八章第五节，第九、十章由李家春撰写，第七、八章由周显初撰写. 其中的第七章是在戴世强教授准备的原讲义的有关章节基础上经较大修改而成，对此，本书作者谨致谢意.

我们还要特别感谢中国科学院研究生教材出版基金的资助，使本书得以出版.

我们开设这门课程和编写这份讲义都是带有探索性的，由于水平所限与经验不足，在取材和安排方面很可能不够恰当，错误疏漏之处也在所难免，希望读者提出批评和建议.

第一章　渐近级数

渐近级数的概念是由 Poincaré 和 Stieltjes 于 1886 年建立起来的，但在此以前，这类级数已被用于计算积分和求解微分方程．在这一章里，我们首先介绍有关渐近级数的历史，然后，给出渐近级数的定义和性质．我们强调指出了“渐近”和“收敛”这两个概念的区别．

1.1　引言

为了使大家有一个直观的概念，我们首先用一个具体的例子来说明渐近级数的实际用途．譬如说，我们要计算零阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的值，我们可以用幂级数方法求和，即

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \\ &= 1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2304}x^6+\frac{1}{147456}x^8-\cdots \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

虽然级数 (1.1.1) 的收敛半径为 ∞, 但对于较大的 x, 该交错级数收敛得非常缓慢．对于 $x=4$, 头三项逐渐增大，似乎像个发散级数．为了准确到三位有效数字，至少要计算八项， $J_0(4)=-0.397$.

在实际上，对于大的 x, 我们可以用如下的渐近级数来进行计算：

$$J_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{(3!!)^2}{2!(8x)^2}+\frac{(7!!)^2}{4!(8x)^4}-\cdots\right)\cos\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{8x}-\frac{(5!!)^2}{3!(8x)^3}+\frac{(9!!)^2}{5!(8x)^5}-\cdots\right)\sin\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

$$
=\left[(\frac{2}{\pi x})^{\frac{1}{2}}(1-\frac{9}{128x^2}+\frac{3675}{32768x^4}-\cdots)\mathrm{oos}(x-\frac{1}{4}\pi)\right.
$$

$$
\left.+(\frac{1}{8x}-\frac{75}{1024x^3}+\frac{59535}{262144x^5}-\cdots)\sin(x-\frac{1}{4})\right] \tag{1.1.2}
$$

式中， $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$. 为了准确到三位有效数字，我们只要取一项就足够了.

在这里，我们注意到渐近级数 (1.1.2) 是不收敛的. 由此可见，有时发散级数竟然会比收敛级数更具有实用意义！乍一看来这确实是令人惊异的.

现在，我们来回顾一下渐近级数的历史. 18 世纪初，人们已经开始注意到级数有收敛与发散之别. 对于什么是发散级数之和，存在着严重的分歧和争论. 后来， Euler 提出了这样一个观点：“级数的值就是级数由之而来的代数表达式的值.” 也就是说，若一个无穷级数是作为某一有限的表达式的展开而得到的，那么，我们可以不管该级数收敛与否，将两者看作完全等价的东西. 由于

$$
\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,\qquad |x|<1 \tag{1.1.3}
$$

上式仅在 $-1<x<1$ 时是收敛的. 按照 Euler 的观点，我们可以认为上式在 $x=1$ 时依然成立，即

$$
\frac{1}{4}=1-1+1-1+1-\cdots \tag{1.1.4}
$$

在第九章，我们将会看到发散级数求和的实际意义.

到了 19 世纪，由于分析中注入了严密化，数学家们就不敢再使用稍不严格的理论，他们逐步接受了发散级数的禁令，并把它们弃于合法的数学之外. 据说， Laplace 在听完 Cauchy 关于级数收敛性的报告以后，急忙跑回家去隐居起来去检查他的《天体力学》一书中每个级数是否收敛？可见，当时在数学界的这一股潮流确实有些势不可挡.

但是，从我们上面所举的例子可以看出，发散级数确实是有用的. 纵然当时人们对渐近级数的理论还一无所知，因而它在数学上

还是不合法的，但人们还是在继续应用它，并探索这里面的数学理论. 发散级数的主要用途是计算积分和解微分方程，我们可以列出如下几个经典的例子，并在后面的章节中予以证明：

1. Stirling 公式 (1730). 在统计物理中，我们常常需要用自然数阶乘的近似公式

$$m! = \sqrt{2\pi m}m^m e^{-m} \tag{1.1.5}$$

实际上，它是下述渐近级数的头几项：

$$\ln m! \sim (m+\frac{1}{2})\ln m - m + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}(0)}{(2n-1)2n\cdot m^{2n-1}} \tag{1.1.6}$$

其中，$\varphi_{2n}(0)$ 是 Bernoulli 数，可用递推公式计算. 如 $\varphi_2 = \frac{1}{6}, \varphi_4 = -\frac{1}{42}, \varphi_6 = -\frac{1}{30}$, 等等

2. 余误差函数的渐近展开 (1812). 这是 Laplace 在他的《概率的解析理论》一书中给出的. 对于很大的 T, 下式成立：

$$\begin{aligned} Erfc(T) &= \int_T^{\infty} e^{-t^2}dt \\ &\sim \frac{e^{-T^2}}{2T}(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1\cdot 3}{(2T^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2T^2)^3} + \cdots) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

3. Laplace 积分. Laplace 在同一书中研究了形如

$$T = \int_a^b g(t)e^{xh(t)}at \tag{1.1.8}$$

的积分. 其中，x, t 和函数 $h(t)$ 均为实数. 当 x 很大时，上述积分的主要部分或渐近展开的首项为：

$$I \sim g(a)e^{xh(a)}\sqrt{\frac{-\pi}{2xh''(a)}} \tag{1.1.9}$$

这里假定 a 是函数 $h(t)$ 在区间 $[a, b]$ 中的最大值，且满足 $h'(a) = 0$.

4. 驻相法 (1872). 这里 Cauchy 在他关于波传播问题的一篇论文中提到，以后又为 Stokes, Lord Kelvin 应用过的方法. 对于形如

$$J=\int_a^b g(t)e^{ixh(t)}dt \tag{1.1.10}$$

的积分，若 a 为 $h(t)$ 的驻值，即 $h'(a)=0$, $h''(a)>0$. 当 $x\to\infty$ 时，积分的主要部分为

$$J\sim\sqrt{\frac{\pi}{2xh''(a)}}g(a)e^{i[xh(a)+\frac{\pi}{4}]} \tag{1.1.11}$$

请大家注意公式 (1.1.9)(1.1.11) 的共同之处.

5. Liouville 变换 (1837) 是用来求下述微分方程

$$\frac{d}{dx}(p\frac{dy}{dx})+(\lambda^2q_0+q_2)y=0 \tag{1.1.12}$$

近似解的方法. 这是一个复系数的二阶常微分方程. p, q_0, q_2 为 x 的正函数，λ 为一个大参数 a 由渐近方法可以导出

$$\begin{aligned} y\ &\sim C_1\frac{1}{(q_0p)^{\frac{1}{4}}}\cos\left[\lambda\int_{x_0}^{x}(\frac{q_0}{p})^{\frac{1}{2}}dx\right]\\ &+C_2\frac{1}{(q_0p)^{\frac{1}{4}}}\sin\left[\lambda\int_{x_0}^{x}(\frac{q_0}{p})^{\frac{1}{2}}dx\right] \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

以后，人们研究了 $q_0(x)$ 在区间中零点 (转向点) 的情况，就发展成 WKB 方法. Liouville 在当时并没有意识到他的公式 (1.1.13) 是方程 (1.1.12) 渐近解的首项.

这些例子充分表明“这级数是发散的；因此，我们有可能用它来作些事情” (Heaviside). 所以，到了 19 世纪末，人们以重新来研究这些发散级数，并为它恢复名誉. 正如 Poincaré 所描述的那样：“在这世纪初已认为要断然从严密数学中驱逐出去的那些级数，在这世纪末又重敲接纳之门，这确实是我们科学的一个奇怪的变迁.” 从这一变迁，我们又一次看到，应用数学工作者决不能拘泥于一切旧框框，而要大胆地接受已经显示出有用的任何思想和方法，只有

这样才能推陈出新建立新的理论. 当时的历史条件下, 建立渐近级数的理论就落到法国数学家 Poincaré 的身上. Stieltjes 在同时独立地完成了这项工作, 不过他称这类级数为半收敛级数 (Kline 1972).

下面我们要阐述在 Poincaré 意义上渐近级数 (asymptotic series) 的定义.

1.2 渐近级数的定义

为了叙述的方便, 我们首先来规定量阶记号大 O 和小 o 的意义:

定义 1: 设 $\Phi(x)$, $\phi(x)$ 是定义在 Ω 上的两个函数. 如果存在某个常数 A, 使对 Ω 某个内点 x_0 的邻域 U 内的所有 x, 满足

$$|\Phi(x)| \le A|\phi(x)| \tag{1.2.1}$$

或者

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\Phi(x)}{\phi(x)}\right| = A \tag{1.2.2}$$

我们称函数 $\Phi(x)$ 至多与 $\phi(x)$ 同阶, 并记为

$$\Phi(x) = O(\phi(x)), \qquad x \to x_0 \tag{1.2.3}$$

定义 2: 设 $\Phi(x)$, $\phi(x)$ 是定义在 Ω 上的两个函数. 对于任一 $\varepsilon > 0$, Ω 某个内点 x_0 总有一个邻域 U_ε 存在, 使所有 $x \in U_\varepsilon$ 满足

$$|\Phi(x)| \le \varepsilon|\phi(x)| \tag{1.2.4}$$

或者

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\Phi(x)}{\phi(x)}\right| = 0 \tag{1.2.5}$$

我们称函数 $\Phi(x)$ 在 $x \to x_0$ 时, 是函数 $\phi(x)$ 的高阶小量, 并记为

$$\Phi(x) = o(\phi(x)), \quad x \to x_0 \tag{1.2.6}$$

注意，在上述定义中，大 O 的情形可能包含小 o 的情形；极限形式的定义对大 O 不一定成立，但对小 o 必成立，关于量阶记号有下述简单性质：

$$
\begin{aligned}
&O[O(\Phi)] = O(\Phi) \\
&O(\Phi) \cdot O(\psi) = O(\Phi \cdot \psi) \\
&O(\Phi) + O(\Phi) = O(\Phi)
\end{aligned}
\tag{1.2.7}
$$

下面我们可以举一些简单的例子：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sin 2x = O(x) \\
&1 - \cos x = O(x^2) = o(x) \\
&\text{ctg}x = O(\frac{1}{x}) \\
&\sec^{-1}(1 + x) = O(x^{\frac{1}{2}}) = o(1)
\end{aligned}
\right.
\qquad x \to 0
\tag{1.2.8}
$$

尽管在上述定义中，对函数 $\phi(x)$ 并没什么要求，但我们一般总是取幂函数，对数函数，指数函数为好．因为大家对这类初等函数的性质非常熟悉，从而使我们非常形象、直观地了解某一函数量阶的大小，这里所以要补充对数函数，指数函数，这是因为有时幂函数还不足以描述某些函数的量阶，如

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{sech}^{-1} x = O(\ln \frac{1}{x}) \\
&\cosh \frac{1}{x} = O(e^{1/x})
\end{aligned}
\right.
\qquad x \to 0
\tag{1.2.9}
$$

请大家注意，对数函数要比任意次幂函数变化得更慢，指数函数要比任意次幂函数变化得要快，所以

$$
\exp(-\frac{1}{x}) = o(x^m), \qquad \text{对任意大的} m \tag{1.2.10}
$$

$$
(x \to 0)
$$

$$
x^n = o(\frac{1}{\ln \frac{1}{x}}), \qquad \text{对任意小的} n \tag{1.2.11}
$$

所以，在渐近幂级数展开中，可将 $\exp(-\frac{1}{x})$ 略去；在渐近对数级数展开中，可将 x^n 略去，它们都是超越小的量 (EST). 这一概念，我们在今后的分析中是要反复用到的.

现在，我们按照准确程度的次序，阐述六种描写极限过程的方式，从而引进渐近表示和渐近级数的定义.

1. 定性地说，某函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时极限是否存在；

2. 定量地给出极限值，可能有三种情况：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}0\\ \text{有限}\\ \infty\end{cases} \tag{1.2.12}$$

3. 更准确地给出极限值，也就是说，把第二种情况表达得更确切些

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}0\\ C\\ \infty\end{cases} \tag{1.2.13}$$

上述三种方式，只说明了函数取极限过程时的最终状态；说明它有没有极限；如果有极限，那么该极限值是什么. 但这三种方式并没有描述函数趋于极限的方式和速率，我们必须予以改进.

4. 用量阶符号表示趋于极限的速率. 在引进标准函数 $\delta(x)$ 时，我们可表达为

$$f(x)=O[\delta(x)] \tag{1.2.14}$$

或

$$f(x)=o[\delta(x)] \tag{1.2.15}$$

5. 渐近表示. 这是上述量阶记号表示的更准确化的形式. 若有标准函数 $\delta(x)$, 当 $x\to 0$ 时满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\delta(x)}=C \tag{1.2.16}$$

也就是说

$$f(x) = C\delta(x) + o[\delta(x)] \tag{1.2.17}$$

我们称函数 $C\delta(x)$ 是 $f(x)$ 的渐近表示，并记为

$$f(x) \sim C\delta(x) \tag{1.2.18}$$

举例如下：

$$\begin{aligned} &\sin 2x \sim 2x \\ &\operatorname{sech}^{-1}x \sim \ln\frac{2}{x} \\ &k_0(\frac{1}{x}) \sim \sqrt{\frac{\pi x}{2}}e^{-\frac{1}{x}} \\ &\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+xt} \sim 1 \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

$$x \to 0$$

等等．所以渐近表示是原先函数的近似值，其误差是高阶量．

6. 渐近级数或渐近展开．从渐近表示中，我们知道了函数 $f(x)$ 在 $x \to 0$ 时的性态．由于 $C\delta(x)$ 同函数 $f(x)$ 终究还有差异，我们还要了解余项趋于零的方式与速度，并依次类推，无限地进行下去，从而使我们对函数性态的描述更加精确化，这就是渐近级数．

定义：对于标准函数系 $\{\delta_n(x)\}$，满足 $\delta_{n+1}(x) = o[\delta_n(x)]$ 表示为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n\delta_n(x) + o[\delta_N(x)] \tag{1.2.20}$$

那么，我们称 $\sum\limits_1^N C_n\delta_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 N 项渐近级数或渐近展开，记为

$$f(x) \sim C_1\delta_1(x) + C_2\delta_2(x) + \cdots + C_N\delta_N(x) \tag{1.2.21}$$

对于有可列个标准函数的情况，对于任意大小的 N，上式都成立，那么我们就得到了无穷渐近展开

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_n(x) \tag{1.2.22}$$

由渐近级数的定义 (1.2.20) 可见，若已知函数 $f(x)$ 及渐近序列 $\{\delta_n(x)\}$. 我们便可容易地逐个确定渐近级数中的系数 C_N，而且这个系数是唯一的.

$$C_N = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum\limits_{1}^{N-1} C_n \delta_n(x)}{\delta_N(x)} \tag{1.2.23}$$

但是我们可以选择不同的渐近序列，所以同一个函数可以有不同的渐近展开. 同样地，不同的函数可以有相同的渐近展开，譬如说两个相差为指数小项的函数可有相同的渐近幂级数展开. 要前面我们已给出了一些例子，如 (1.1.2)(1.1.6)(1.1.7) 等，我们还举出如下一些例子：

$$\begin{aligned}
&\sin 2x \sim 2x - \frac{3}{4}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \cdots \\
&\mathrm{Sech}^{-1}x \sim \ln\frac{2}{x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{32}x^4 + \cdots \\
&K_0(\frac{1}{x}) \sim \sqrt{\frac{\pi x}{2}}e^{-\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{8}x + \frac{9}{128}x^2 + \cdots) \\
&\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{1+xt} \sim 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

$$x \to 0 \tag{1.2.24}$$

如果渐近级数的标准函数序列是幂函数，我们就称它为渐近幂级数. 我们看到，渐近级数往往是发散的.

那么，“渐近”的概念和数学分析中“收敛”这个概念究竟有什么区别呢？

1. “收敛”这个概念是指函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n\delta_n(x)$ 在 x 固定，项数 N 趋于无穷时，级数的部分和有极限 $f(x)$. 所以，对于收敛的级数，项数取得越多，结果就愈精确；“渐近”这个概念是指：当级数的项数 N 固定，变量 $x \to x_0$ 时，余项同级数的末项相比是高阶小量. 所以，当 x 愈接近于 x_0 时，结果愈精确，对于固定的 x，精确度是有一定限制的，单纯增加项数往往无济于事.

2. 收敛的级数是指函数与级数部分和相差的绝对误差小；渐近级数是指函数与有限渐近级数和的差所表示的余项的相对误差很小，从实用意义上讲，我们只要相对误差小就可以了，这就可以保证有一定的有效数字. 完全不必苛求.

3. 因此，收敛级数与发散渐近的各项大小与性态会有本质的区别. 收敛级数的项，当 n 充分大以后，总要趋于零的；发散的渐近级数，往往后面的项会逐步增大，如图 1.2.1 所示；这往往使人迷惑不解，其实当 $x \to x_0$ 时，后面的项最终总会小于前面项的

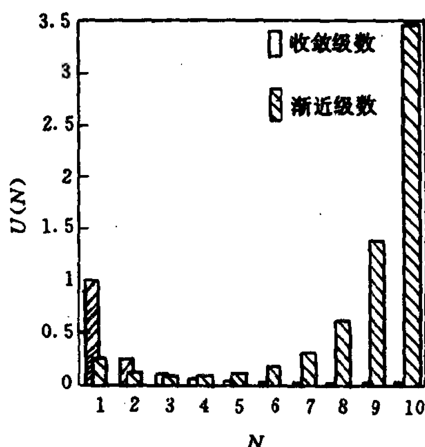


图 1.2.1 收敛级数和渐近级数的性态

总起来说，我们在计算时所关心的是近似值与准确值的误差或余项的大小. 对渐近级数来说，它是最后一项的高阶量 (注意，它并不等于所余下级数的部分和！) 因此，它可以有效地用来作近似计

算，并优于缓慢收敛级数求和的方法.

对于渐近级数的这一性态，我们可用下面简单的例子说明：

$$f(x) \sim \sum_{n-1}^{\infty} n! x^n \tag{1.2.25}$$

显然

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = (n+1)x \tag{1.2.26}$$

所以，当

$$N \geq \left[\frac{1}{x}\right] - 1 \tag{1.2.27}$$

时，后项就会比前项大，符号 [ ] 指的是整数部分.

既然对渐近级数说来，并非项数取得愈多愈好，那么究竟取几项合适呢？这就是最佳截断问题 (optimal truncation). 我们知道，N 项渐近级数的余项为 $O[\delta_{N+1}(x)]$, 所以，如果第 $N+1$ 项是最小的项，也就是说，从 $N+2$ 项起开始增大了，那么我们取 N 项的渐近级数的余项是最小的，也就是说，该渐近级数只有取 N 项才是最准确的. 我们称

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{N} C_n \delta_n(x) \tag{1.2.28}$$

为原渐近级数的最佳截断. 显然，最佳截断的项数 N 是依赖于 x, 即 $N = N(x)$.

对于初学者来说，这个概念是不容易接受的，我们将以余误差函数的最佳截断为例来说明计算的方法和过程. 我们假定已知余误差函数的渐近展开为

$$\operatorname{erfc}(T) \sim \frac{e^{-T^2}}{2T}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2T^2)^{n-1}}\right] \tag{1.2.29}$$

下一步，我们来求最佳截断. 这就要考察什么时候

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2T^2} \geq 1 \tag{1.2.30}$$

显然，当

$$n \geq T^2 + \frac{1}{2} \tag{1.2.31}$$

项以后，渐近级数的项开始增加，所以，级数中绝对值最小的项为 $\left[T^2 + \frac{1}{2}\right]$ 项处，最佳截断取在

$$N = \left[T^2 + \frac{1}{2}\right] - 1 \tag{1.2.32}$$

处. 对于 $T = 2$, $N = 3$, $T = 3$, $N = 8$ 如此等等. 我们对余误差函数进行了数值计算，其结果列于表 1.2.1 中.

表 1.2.1　余误差函数的最佳截断

N \ T	2	3
1	0.004578909	0.000020568
2	0.004006546	0.000019425
3	0.004221182	0.000019616
4	0.004087035	0.000019563
5	0.004204414	0.000019583
6	0.004072362	0.000019573
7	0.004253933	0.000019579
8		0.000019575
9		0.000019578
10		0.000019575
11		0.000019579
12		0.000019574
13		0.000019580
准确值	0.004148	0.000019577
相对误差	1.47%	0.005%

1.3　渐近级数的性质

现在，我们阐述关于渐的级数的一些基本性质:

1. 若函数 $f(x), g(x)$ 按相同的渐近序列 $\{\delta_n(x)\}$ 有如下的渐近展开:

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} f_n \delta_n(x) \tag{1.3.1}$$

$$g(x) \sim \sum_{1}^{\infty} g_n \delta_n(x) \tag{1.3.2}$$

那么，函数 $f(x)$, $g(x)$ 的和与差必有渐近展开

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{1}^{\infty} (f_n \pm g_n) \delta_n(x) \tag{1.3.3}$$

2. 若函数 $f(x)$ 按渐近序列 $\{\delta_n(x)\}$ 有渐近展开

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} f_n \delta_n(x) \tag{1.3.4}$$

c 为任意常数，那么，函数 $cf(x)$ 必有渐近展开

$$cf(x) \sim \sum_{1}^{\infty} cf_n \delta_n(x) \tag{1.3.5}$$

3. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x \to \infty$ 时可展开成渐近幂级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{x^n}, \qquad x \to \infty \tag{1.3.6}$$

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{x^n}, \qquad x \to \infty \tag{1.3.7}$$

那么，它们的积有渐近展开

$$f(x) \cdot g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \qquad x \to \infty \tag{1.3.8}$$

式中

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} f_j g_{n-j} \tag{1.3.9}$$

对于一般的渐近级数说来，渐近序列相乘后将产生新的渐近序列，没有上述那样简单的结果.

4. 若 $f(x)g(x)$在$x \to \infty$ 时，有 (1.3.6), (1.3.7) 形式的渐近幂级数，且 $g_0 \neq 0$, 那么 $f(x)/g(x)$ 的渐近展开为

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{x^n} \tag{1.3.10}$$

其中， d_m 由方程组

$$f_m = \sum_{j=0}^{m} d_j g_{m-j} \qquad (m = 0, 1, 2\cdot) \tag{1.3.11}$$

的解来确定，只要 $g_0 \neq 0$, 方程组有解.

上面这些性质均可根据渐近级数的定义，量阶符号的运算规则导出，这里不予赘述.

5. 若 $f(x)$在$x \to \infty$ 时可以展开成为式 (1.3.6) 那样的渐近级数 $f(x)$在$x > a > 0$ 时连续，那么，对于 $x > a$, 函数

$$F(x) = \int_x^{\infty} (f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}) dt \tag{1.3.12}$$

有渐近展开

$$F(x) \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \cdots, \qquad x \to \infty \tag{1.3.13}$$

也就是说，从形式上看，在一定条件下渐近幂级数可逐项积分.

证明: 由假设可知， $t > a$ 时函数 $f(t) - a_0 - \frac{a_0}{t}$ 连续，且当 $t \to \infty$ 时为 $O(\frac{1}{t^2})$, 所以 $F(x)$ 存在

$$F(x) = \int_x^{\infty} \left\{ \sum_2^m \frac{a_n}{t^n} + O(\frac{1}{t^{m+1}}) \right\} dt = \sum_1^{m-1} \frac{a_n}{nx^n} + O(\frac{1}{x^m}) \tag{1.3.14}$$

这是由于

$$\left|\int_x^\infty O(\frac{1}{t^{m+1}})dt\right| \le A\int_x^\infty \left|\frac{1}{t^{m+1}}\right|dt = \frac{A}{mx^m} \tag{1.3.15}$$

的缘故.

6. 若 $f(x)$ 可以展开成如式 (1.3.6) 那样的渐近幂级数，该函数有连续导数 $f'(x)$，也有渐近幂级数展开，那么

$$f'(x) \sim -\sum_2^\infty \frac{(n-1)f_{n-1}}{x^n} \tag{1.3.16}$$

证明：根据假定

$$f'(x) \sim \sum_0^\infty \frac{\overline{f}_n}{x^n} \tag{1.3.17}$$

由于 $f'(x)$ 连续，所以

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \int_x^y f'(t)dt \\ &= \overline{f}_0(y-x)+\overline{f}_1\ln\frac{y}{x} \\ &\quad +\int_x^y \left\{f'(t)-\overline{f}_0-\overline{f}_1/t\right\}dt \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

由式 (1.3.6) 当 $y\to\infty$ 时， $f(y)\to f_0$, 上式的积分为 $O(\frac{1}{x})$, 所以 $\overline{f}_0=\overline{f}_1=0$, 由逐项积分定理

$$f_0-f(x)=\int_x^\infty \left\{f'(t)-\overline{f}_0-\frac{\overline{f}_1}{t}\right\}dt \sim \sum_1^\infty \frac{\overline{f}_{n+1}}{nx^n}, \qquad x\to\infty \tag{1.3.19}$$

比较 (1.3.6), (1.3.19) 得 f_n与$\overline{f}_{n+1}$ 间的关系

$$\overline{f}_{n+1}=-nf_n \tag{1.3.20}$$

因此

$$f'(x) \sim -\sum_{2}^{\infty} \frac{(n-1)f_{n-1}}{x^n}, \qquad x \to \infty \tag{1.3.21}$$

这也就是说，从形式上看，在一定条件下渐近级数是可以逐项微分的. 当然，对于正幂次的渐近级数，也有相应的定理，留给读者思考.

我们知道，Poincaré 关于渐近级数的定义同样也适用于复变量的情况，利用解析函数的性质，可以得到一些新的结论：

定理一：若 $f(z)$ 是 $|z| \geq a$ 上的单值解析函数，且有渐近展开

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \qquad z \to \infty \tag{1.3.22}$$

对一切 Arg z 成立. 这里符号 Arg 指辐角之意. 那么，该渐近级数必在 ∞ 领域内收敛于 $f(z)$.

证明：显然，对于 ∞ 孤立奇点的领域内，$f(z)$ 有 Laurent 展开

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n z^n \tag{1.3.23}$$

且在 $|z| \geq R_1$ 收敛，式中

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds \tag{1.3.24}$$

积分围道 Γ 是 $|z| = R \geq R_1$ 之圆. 由 (1.3.22) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a_0$, 所以 $|f(z)| \leq M$, 即 $f(Z)$ 有界，因而

$$|f_n| \leq \frac{M}{R^n} \qquad (n > 0) \tag{1.3.25}$$

但这里 R 是任意选取的大数，上式表示 $f_n = 0 (n > 0)$, 由此可得

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} f_{-n} z^{-n} \tag{1.3.26}$$

该级数在 $|z| \geq R_1$ 收敛. 又由于

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \tag{1.3.27}$$

渐近级数的系数可以按下述方法求出:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{z\to\infty} f(z) = f_0 \\ a_1 &= \lim_{z\to\infty} \{f(z) - a_0\}\, z = f_{-1} \\ &\cdots \\ a_n &= f_{-n} \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

所以, 实际上渐近级数与 Laurent 级数是完全一致的, 这就证明了渐近级数的收敛性. 至于 ∞ 处的渐近级数有有限项正次幂的情况也有类似的结论.

推论: 若 $f(z)$在$R > a$ 上是单值解析函数, 且有渐近展开式 (1.3.22) 在 $z \to \infty$ 时对一切辐角成立, 该渐近级数在 ∞ 的领域不收敛于 $f(z)$, 那么 ∞ 必是 $f(z)$ 的本性奇点. 对于本性奇点, 往往函数在不同辐角范围内有不同的渐近展开式, 这种现象叫 Stokes 现象. 关于这个问题将在下面章节中讨论.

定理二: 若 $f(z)$ 在扇形区域 R: $z > a$, $\alpha < \operatorname{Arg} z < \beta$ 内解析, 且在 $z \to \infty$ 时, 对任一包含在 R 内的闭扇形 $\alpha_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta_1$ 内有渐近展开式

$$f(z) \sim f_0 + \frac{f_1}{z} + \frac{f_2}{z^2} + \cdots \tag{1.3.29}$$

那么

$$f'(z) \sim -\frac{f_1}{z^2} - \frac{2f_2}{z^3} - \cdots \tag{1.3.30}$$

亦在 R 的任一闭扇形内一致有效地成立.

这里, 要解释一下一致有效渐近级数 (uniformly valid asymptotic series) 的意义: 这就是说, 在 R 内的任一闭扇形 $\alpha_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq$

β_1 内

$$f(z)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{f_n}{z^n}+\frac{\Phi_m(z)}{z^m} \tag{1.3.31}$$

这里，要求 z 充分大时，

$$|\Phi_m(z)|<A_m \tag{1.3.32}$$

该常数 A_m 与辐角无关.

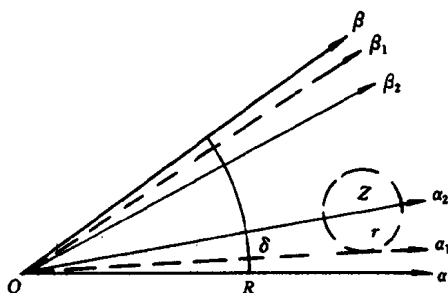


图 1.3.1　在闭扇形内一致有效的渐近级数

将 (1.3.31) 微商得

$$f'(z)=-\sum_{0}^{m-1}\frac{(n-1)f_{n-1}}{z^n}+\frac{\psi_m(z)}{z^m}$$

其中

$$\psi_m(z)=\Phi_m'(z)-(m-1)f_{m-1}-\frac{m\Phi_m(z)}{z}$$

我们只要证明 $\psi_m(z)$ 在 R 中的任一闭扇形 $\alpha_2\le \text{Arg}\ z\le\beta_2$ 内一致有界，其关键是要证明 $\Phi_m'(Z)$ 在上述区域内一致有界. 由高阶导数定理，我们有

$$\Phi_m'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi_m(s)ds}{(s-z)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi_m(z+\delta|z|e^{i\theta})}{\delta|z|e^{i\theta}}d\theta \tag{1.3.33}$$

C 为以闭扇形 $\alpha_2 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta_2$ 内以 z 为圆心, $\delta|z|$ 为半径的圆, 要求它不超出 $\alpha_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta_2$ 闭扇形外, 所以, 当 $|z|$ 充分大时,

$$|\Phi_m(z)| \leq A_m \tag{1.3.34}$$

成立, A_m 与幅角无关

$$\left|\Phi_m'(Z)\right| \leq \frac{A_m}{\delta_M a} \tag{1.3.35}$$

这里 δ_M 为 δ 可能的最小值, 即 $\sin|\alpha_2 - \alpha_1|$. 因此定理得证.

从该定理, 我们知道, 对一致有效的复渐近级数可以进行逐项微分的.

1.4 隐函数的渐近分析

对于解析函数, 我们有反函数定理可以求出隐函数幂级展开, 从而得到隐函数的渐近展开式和求超越方程根的渐近展开, 首先, 我们给出两个反函数定理, 其证明请看附录一.

定理一: 若复函数 $f(z)$在 $|z - z_0| \leq \rho_0$ 内解析

即

$$w = f(z) = w_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{1.4.1}$$

其中 $a_1 \neq 0$, 则必存在反函数 $z = \varphi(w)$在 $|w - w_0| \leq 0$ 内是单值解析函数, 如果 $F(z)$在 $|z - z_0| = \rho_0$ 内解析, 且有

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \tag{1.4.2}$$

那么,

$$F[\varphi(w)] = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ F'(\zeta)\left(\frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - w_0}\right)^n \right\}\bigg|_{\zeta = z_0} (w - w_0)^n \tag{1.4.3}$$

推论：取 $F(z)\equiv z$ 那么就得到反函数的展开式

$$z=\varphi(w)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n\bigg|_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n \quad (1.4.4)$$

定理二：若 $f(z)$在$|z-z_0|\le\rho_0$ 内解析，并有

$$w=f(z)=w_0+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots \qquad (1.4.5)$$

其中 $a_k\neq 0$，$|\mathrm{Arg}(w-w_0)|\le\pi-\eta$ 中存在 $w=f(z)$ 的反函数 $z=\varphi(w)$ 有

$$z=\varphi(w)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{\frac{(\zeta-z_0)^n}{(f(\zeta)-w_0)^{n/k}}\right\}(w-w_0)^{\frac{n}{k}}\bigg|_{\zeta=z_0} \qquad (1.4.6)$$

如果 $k=1$, 这就是定理一.

现在用几个实例来说明反函数定理的应用.

[**例 1.4.1**]　求 $w=f(z)=ze^{-az}$，$a\neq 0$ 的反函数，直接应用定理的推论

$$z=\varphi(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}e^{na\zeta}\bigg|_{\zeta=0}w^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}a^{n-1}}{(n-1)!}w^n \quad (1.4.7)$$

[**例 1.4.2**]　由 Kepler 方程

$$E-e\sin E=\tau \qquad (1.4.8)$$

(其中 e 为偏心率，τ 为时间，E 为行星偏近日点角), 给出 E 随时间的显式表达式, 由 $e=\dfrac{E-\tau}{\sin E}$ 求反函数 $E=E(e)$. 从定理一可得

$$E=\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\sin^n\zeta\bigg|_{\zeta=\tau}e^n=\tau+\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^n \qquad (1.4.9)$$

由 $\sin\zeta = \frac{1}{2i}(e^{i\zeta} - e^{-i\zeta})$

$$\sin^n\zeta = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\Big[\sin\ n\zeta - C_n^1\sin(n-2)\zeta\cdots \\ \qquad +(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{\frac{n-1}{2}}\sin\zeta\Big] \qquad n\text{为奇数} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\Big[\cos\ n\zeta - C_n^1\cos(n-2)\zeta + \cdots \\ \qquad +(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}\Big] \qquad n\text{为偶数} \end{cases} \tag{1.4.10}$$

所以

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}n!}\Big[n^{n-1}\sin n\tau - C_n^1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\tau \\ \qquad +\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{\frac{n-1}{2}}\sin\tau\Big] \qquad n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2^{n-1}n!}\Big[n^{n-1}\sin n\tau - C_n^1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)\tau \\ \qquad +\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}2^{n-1}\sin 2\tau\Big] \qquad n\text{为偶数} \end{cases} \tag{1.4.11}$$

[例 1.4.3] 求方程

$$x = \text{ctg}x \tag{1.4.12}$$

之根 x_n, $x_n \in (n\pi,\ (n+1)\pi)$, $n = \pm1,\ \pm2, \cdots$, 显然上式可写为

$$x_n = \text{ctg}(x_n - n\pi) \tag{1.4.13}$$

当 $x_n \to \infty$时, $x_n - n\pi \to 0$, 令$x_n = n\pi + z$, 以及$w = \frac{1}{n\pi}$ 于是,

$$w = f(z) = \frac{\sin z}{\cos z - z\sin z} \tag{1.4.14}$$

由定理一的推论

$$\text{得}\ z = \varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[\frac{\zeta^n(\cos\zeta - \zeta\sin\zeta)^n}{\sin^n\zeta}\right]\Bigg|_{\zeta=0} w^n \tag{1.4.15}$$

所以

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + \cdots \tag{1.4.16}$$

当然，反函数也可由待定系数求出.

[**例 1.4.4**]　求隐函数

$$xe^x = t \tag{1.4.17}$$

当 $t \to \infty$时, $x = x(t)$ 的量阶和渐近展开. 由 (1.4.17) 可以得到

$$x = \ln t - \ln x \tag{1.4.18}$$

由 (1.4.17) 右边知，在 $t \to \infty$时,x 亦以某种方式趋于无限，所以 (1.4.18) 中 $x = O(\ln t)$, 第二项为次要项 $O(\ln\ln t)$ 为了估计第二项，将 (1.4.18) 取对数

$$\ln x = \ln(\ln t + O(\ln\ln t)) = \ln\ln t + O(\frac{\ln\ln t}{\ln t}) \tag{1.4.19}$$

于是

$$x = \ln t - \ln\ln t + O(\frac{\ln\ln t}{\ln t}) \tag{1.4.20}$$

进一步精确化

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln(\ln t - \ln\ln t + O(\frac{\ln\ln t}{\ln t})) \\ &= \ln\ln t - \frac{\ln\ln t}{\ln t} + \frac{1}{2}(\frac{\ln\ln t}{\ln t})^2 + O(\frac{\ln\ln t}{\ln^2 t})\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

一般地

$$\begin{aligned}x = \ln t - \ln\ln t + P_0(\ln\ln t)\frac{\ln\ln t}{\ln t} + P_1(\ln\ln t)(\frac{\ln\ln t}{\ln t})^2 \\ + \cdots P_N(\ln\ln t)(\frac{\ln\ln t}{\ln t})^{N+1} + O(\frac{\ln\ln t}{(\ln t)^{N+2}})\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

其中 $P_k(y)$ 是 y 的 k 次多项式，说明了迭代方法在渐近分析中的应用.

习　　题

1.1 试用初等函数 (如幂函数, 指数函数, 对数函数) 求下述表达式当 $\varepsilon \to 0$ 时的量阶.

(Ⅰ) $\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$　　(Ⅱ) $\dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{1-\cos\varepsilon}$

(Ⅲ) $\ln\left[1+\dfrac{\ln(1+2\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right]$　　(Ⅳ) $\ln\left[1+\dfrac{\ln\dfrac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon}\right]$

(Ⅴ) $e^{-ch\frac{1}{\varepsilon}}$　　(Ⅵ) $\displaystyle\int_0^\varepsilon e^{-s^2}ds$

1.2 求下列函数的量阶 $(\varepsilon \to 0)$:

(Ⅰ) $\text{th}^{-1}(1-\varepsilon)$

(Ⅱ) $\cos^{-1}(1-\varepsilon)$

1.3 对于小 ε, 请按量阶次序排列:

$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, ε^2, $\varepsilon^2\ln\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, ε, $\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ln\varepsilon^{-1}$, 1, $\ln\ln\varepsilon^{-1}$, $\ln\varepsilon^{-1}$

1.4 试用量阶符号的定义, 证明量阶运算的性质:

(Ⅰ) $O(\psi)+O(\psi)=O(\psi)$

(Ⅱ) $O(\psi)+o(\psi)=O(\psi)$

(Ⅲ) $O(\psi)\cdot O(\varphi)=O(\psi\varphi)$

(Ⅳ) $O(\psi)\cdot o(\varphi)=o(\psi\varphi)$

1.5 用渐近级数的定义, 证明两个渐近幂级数乘除运算之定理.

1.6 已知 $x\to\infty$ 时,

$$\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t}dt \sim \frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}-\cdots$$

试求其最佳截断，具体计算 $x=2,\ 3$ 时的近似值.

1.7　已知

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt \sim (\frac{1!}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\frac{5!}{x^6}\cdots)\cos x -(\frac{0!}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}\cdots)\sin x$$

求上述渐近级数的最佳截断，具体计算 $x=2,\ 3$ 时的近似值.

1.8　求二次方程每个根的近似值，取展开式二项：

(Ⅰ) $x^3-(2+\varepsilon)x^2-(1-\varepsilon)x+2+3\varepsilon=0$

(Ⅱ) $x^3+(3-2\varepsilon)x^2+(3+\varepsilon)x+1-2\varepsilon=0$

(Ⅲ) $\varepsilon(x^3+x^2)+4x^2-3x-1=0$

1.9　求下述超越方程根的近似值：

$$x=\mathrm{tg}x$$

1.10　已知零阶 Bessel 函数的渐近展开为

$$J_0(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[u(x)\cos(x-\frac{1}{4}\pi)+v(x)\sin(x-\frac{1}{4}\pi)\right]$$

其中

$$u(x)=1-\frac{(3!!)^2}{2!(8x)^2}+\frac{(7!!)^2}{4!(8x)^4}-\frac{(11!!)^2}{6!(8x)^6}+\cdots$$

$$v(x)=\frac{1}{8x}-\frac{(5!!)^2}{3!(8x)^3}+\frac{(9!!)^2}{5!(8x)^5}-\frac{(13!!)^2}{7!(8x)^7}+\cdots$$

求它的根的近似值.

第二章 积分的渐近展开

前面已经提到，有一些方程的准确解往往是以积分形式来表示的．若用 Laplace 变换， Fourier 变换方法求解，多数情况亦是如此．若方程的解是特殊函数，它也可用积分形式表示出来．我们进行理论分析、工程设计时，并不能只满足于形式上的完美，最重要的是算出具体的数值，哪怕是近似的也好．

在本章，我们介绍求积分渐近展开的各种方法．尤其是，Laplace 方法，驻相法 (stationary phase method) 以及最陡下降法 (steepest descent method)，这是在研究工作中常用的方法，我们不仅要知道计算公式，更要紧的是掌握它们的原理和要领，以便灵活应用．

2.1 逐项积分与分部积分法

这两种方法的原理很简单，我们仅用几个例子说明即可

[**例 2.1.1**] 当 $\varepsilon \to 0$ 时求积分

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \sin \varepsilon x^2 dx \tag{2.1.1}$$

的渐近展开．对于小的 ε，我们有展开式

$$\sin \varepsilon x^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}(\varepsilon x^2)^{2i-1}}{(2i-1)!} + O(\varepsilon^{2N+1}) \tag{2.1.2}$$

上述级数不仅收敛，而且也是渐近级数，可以逐项积分

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{(i+1)}(\varepsilon x^2)^{2i-1}}{(2i-1)!} dx + O(\varepsilon^{2N+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}\varepsilon^{2i-1}}{(2i-1)!(4i-1)} + O(\varepsilon^{2N+1}) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

因上式对所有 N 成立，根据定义，我们有

$$I(\varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}\varepsilon^{2i-1}}{(2i-1)!(4i-1)} \tag{2.1.4}$$

[**例 2.1.2**]　求完全椭圆积分

$$I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}, \qquad m \to 0 \tag{2.1.5}$$

有渐近展开.

由二项定理，我们有

$$(1-m\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{2i \cdot i!}(m\sin^2\theta)^i \tag{2.1.6}$$

同上例一样，可逐项积分

$$\begin{aligned} I(m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{2^i i!} m^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\theta d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{2^{i+1} i!} \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!(2i)!\pi}{2^{3i+1}(i!)^3} m^i \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}m + \frac{9\pi}{128}m^2 + \frac{25\pi}{512}m^3 + \frac{1225\pi}{32768}m^4 + \cdots \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

推导中，我们应用了 Γ 函数的性质 (请见附录一). 由上述近似公式 (2.1.7), 可以计算不同 m 时的积分值，相对误差列于下表:

表 2.1.1　椭圆积分公式 (2.1.7) 的相对误差

m	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
相对误差 %	0	0.000	0.083	0.28	0.784	1.957	4.618

［例 2.1.3］ 不完全的 Γ 函数

$$\gamma(a,x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt \tag{2.1.8}$$

将 e^{-t} 展开级数，可得 $x\to 0$ 时的渐近展开

$$\gamma(a,x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\int_0^x t^{i+a-1}dt=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{i+a}}{i!(i+a)} \tag{2.1.9}$$

［例 2.1.4］ 不完全的 Γ 函数

$$\Gamma(a,x)=\Gamma(a)-\gamma(a,x)=\int_x^{\infty} e^{-t}t^{a-1}dt \tag{2.1.10}$$

为求 $x\to\infty$ 时的渐近展开，由分部积分得递推公式

$$\Gamma(a,x)=e^{-x}x^{a-1}+(a-1)\Gamma(a-1,x)$$

所以

$$\Gamma(a,x)=e^{-x}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-i)}x^{a-1-i}+\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-N)}\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-N-1}dt \tag{2.1.11}$$

我们来估计最后一项余项 R_N, 对所有 N

$$\begin{aligned}|R_N| &\le \left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-N)}\right|\left|\int_x^{\infty}e^{-t}t^{a-N-1}dt\right| \\ &\le \left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-N)}\right| x^{a-N-1}\int_x^{\infty}e^{-t}dt=O(e^{-x}x^{a-N-1})\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

所以，我们有渐近展开

$$\Gamma(a,x)\sim e^{-x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-i)}x^{a-1-i} \tag{2.1.13}$$

可见 $\Gamma(a,x)$ 是 $O(e^{-x}x^{a-1})$ 量阶的.

将上述结果应用于余误差函数

$$\operatorname{erfc}(T)=\int_T^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2},\ T^2)$$

由公式 (2.1.13) 可得

$$\operatorname{erfc}(T)\sim\frac{1}{2}e^{-T^2}\sum_{i=0}^\infty\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-i)}T^{-(2i+1)} \tag{2.1.14}$$

由 Γ 函数性质

$$\Gamma(\frac{1}{2}+i)\Gamma(\frac{1}{2}-i)=\frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-i)\pi}=(-1)^i\pi$$

而

$$\Gamma(\frac{1}{2}+i)=\frac{(2i-1)!!}{2^i}\sqrt{\pi}$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{erfc}(T)&\sim\frac{1}{2}e^{-T^2}\sum_{i=0}^\infty\frac{(-1)^i(2i-1)!!}{2^i}T^{-(2i+1)}\\&=\frac{1}{2T}e^{-T^2}\left[1-\frac{1}{2T^2}+\frac{1\cdot 3}{(2T^2)^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2T^2)^3}+\cdots\right]\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

这就是第一章的公式 (1.1.7).

[**例 2.1.5**]　求大 x 时，下述积分

$$I(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{(x+t)}dt \tag{2.1.16}$$

在 $x\to\infty$ 时的渐近展开. 由分部积分得

$$I(x)=\sum_{i=1}^N\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i}+(-1)^N N!\int_0^\infty\frac{e^{-t}dt}{(x+t)^{N+1}} \tag{2.1.17}$$

由于最后一项余项

$$|R_N| \leq \frac{N!}{x^{N+1}} \int_0^\infty e^{-t} dt = O(\frac{1}{x^{N+1}})$$

它比渐近级数第 N 项是高阶小量，所以

$$I(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i} \tag{2.1.18}$$

注意，渐近级数 (2.1.13), (2.1.15), (2.1.18) 都是发散的.

2.2 Laplace 方法

在数学物理问题中，我们经常会遇到如下形式的实 Laplace 积分:

$$I(x) = \int_a^b f(t) e^{xh(t)} dt$$

我们要求上述积分在 $x \to \infty$ 时的渐近展开.

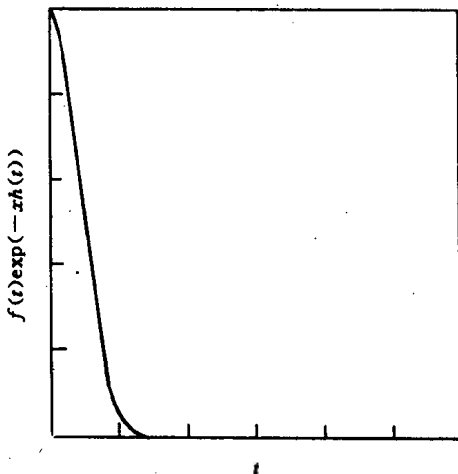


图 2.2.1 Laplace 方法的几何解释

直观地看，若函数 $h(t)$ 在 $[a, b]$ 上某内点 t_c 处有最大值，当 $x \to \infty$ 时，指数函数 $e^{xh(t)}$ 使被积函数在 t_c 附近要比 $[a, b]$ 中其它地方要大得多，所以 Laplace 积分的主要贡献来自 t_c 附近区域的积分. 当最大值在边界点 a 或 b 处时，也有相同的情形，不过此时，a 或 b 不一定同时是极值点. 上述思想可从图 2.2.1 明显地看出. 当然在实际情形还要考虑 $f(t)$ 在 t_c 附近性态的影响.

引理：若在区间 $[a, b]$ 中， $h'(t), h''(t)$ 存在连续， $h'(t) \neq 0$， $f'(t)$ 存在连续， $f(a).f(b) \neq 0$ 则积分

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{xh(t)}dt = O(\frac{1}{x}e^{x\max(h(a),\ h(b))}) \tag{2.2.1}$$

这里，由于 $h'(t) \neq 0$, 我们可用分部得到：

$$I(x) = \frac{f(b)}{h'(b)}\frac{e^{xh(b)}}{x} - \frac{f'(a)}{h'(a)}\frac{e^{xh(a)}}{x} + r(x) \tag{2.2.2}$$

式中

$$r(x) = -\frac{1}{x}\int_a^b \left[\frac{f(t)}{h'(t)}\right]' e^{xh(t)}dt \tag{2.2.3}$$

现在估计余项 $r(x)$ 之大小

$$|r(x)| \leq \frac{M}{x}\left|\int_a^b e^{xh(t)}h'(t)dt\right| = \frac{M}{x^2}\left|e^{xh(b)} - e^{xh(a)}\right|$$

式中

$$M = \max\left|\left[\frac{f(t)}{h'(t)}\right]'\frac{1}{h'(t)}\right|$$

由引理的假定，显然这是有界函数，由此可见余项 $r(x)$ 是高阶小量.

在 (2.2.2) 式的头两项中，视 $h(a)$, $h(b)$ 中那个大，就保留那一项，只要 $h(a) \neq h(b)$, 小的与大的相比是超越小的量，可以忽略. 引理证毕. 若积分限 b 是 ∞, 只要 $I(x)$, $r(x)$ 仍是可积的，引理依然成立成立.

Laplace积分定理：对于积分

$$I(x)=\int_a^b f(t)e^{xh(t)}dt \qquad x\to\infty \tag{2.2.4}$$

在区间 $[a,\ b]$ 中，$h'(t), h''(t)$ 存在连续，$h'(a)=0$，$h''(a)<0$，即在 a 点有最大值，$h'(t)$ 在其余各点不为零；$f'(t)$ 存在连续，$f(a)\neq 0$, 我们有渐近表示

$$I(x)\sim f(a)e^{xh(a)}\sqrt{\frac{-\pi}{2xh''(a)}} \tag{2.2.5}$$

证明：将积分 (2.2.4) 分成两个区间上的积分

$$I(x)=I_1(x)+I_2(x) \tag{2.2.6}$$

式中

$$I_1(x)=\int_a^{a+\delta} f(t)e^{xh(t)}dt$$

$$I_2(x)=\int_{a+\delta}^{b} f(t)e^{xh(t)}dt$$

由引理可知

$$I_2(x)=O\left(\frac{1}{x}e^{xh(a+\delta)}\right) \tag{2.2.7}$$

再来估计积分 I_1, 由 $f(t)$，$h(t)$ 的 Taylor 展开式, 必存在 $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$, 下式

$$I_1(x)=e^{xh(a)}\int_a^{a+\delta}\left[f(a)+f'(a+\theta_1 h)(t-a)\right]e^{\frac{1}{2}h''(a+\theta_2 h)(t-a)^2 x}dt \tag{2.2.8}$$

成立，其中，$h=t-a$. 由 $f(x)$，$h''(x)$ 的连续性可知

$$f(a)-\varepsilon_1<f(x)<f(a)+\varepsilon_1$$

$$-B=h''(a)-\varepsilon_2<h''(a)+\varepsilon_2=-A$$

这里因 $h''(a)<0$, 所以 $A>0$, $B>0$ 以及 $A<B$, 于是

$$e^{xh(a)}(f(a)-\varepsilon_1)\int_a^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}xB(t-a)^2}dt$$

$$<I_1(x)<e^{xh(a)}(f(a)+\varepsilon_1)\int_a^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}xA(t-a)^2}dt \qquad (2.2.9)$$

由 § 2.1 节不完全 Γ 函数或余误差函数的量级估计，可得

$$\begin{aligned}\int_a^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}xA(t-a)^2}dt &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}xAu^2}du-\int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}xAu^2}du\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{2xA}}\left\{1+O(e^{-\frac{1}{2}xA\delta^2})\right\}\end{aligned}$$

因为第二个积分就是余误差函数． 同理

$$\int_a^{a+\delta} e^{-\frac{1}{2}xB(t-a)^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2xB}}\left\{1+O(e^{-\frac{1}{2}xB\delta^2})\right\}$$

在略去超越小项后

$$(f(a)-\varepsilon_1)\sqrt{\frac{\pi}{2xB}}e^{xh(a)}<I_1(x)<(f(a)+\varepsilon_1)\sqrt{\frac{\pi}{2xA}}e^{xh(a)} \quad (2.2.10)$$

由于，与 $I_1(x)$ 相比， $I_2(x)$ 也是超越小的量阶，略去它后得

$$(f(a)-\varepsilon_1)\sqrt{\frac{\pi}{2xB}}e^{xh(a)}<I(x)<(f(a)+\varepsilon_1)\sqrt{\frac{\pi}{2xA}}e^{xh(a)} \quad (2.2.11)$$

我们可以选取 δ 充分地小, 使 ε_1, ε_2 任意小, 所以, A,B 与 $-h''(a)$ 可任意地接近，必有

$$I(x)=f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2xh''(a)}}e^{xh(a)} \qquad (2.2.12)$$

定理证毕．在定理证明过程中，将区域缩小至 a 的领域，运用中值定理或 Taylor 公式后又将区域扩展至无穷所带来误差均匀为超越小量，这一技巧是我们经常要运用的．对于右端点 b 取极值或内点 c 取极值的情况，请读者思考．

[例 2.2.1] 求 n 阶虚宗量 Bessel 函数的渐近表示

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos nt dt, \qquad x\to\infty \tag{2.2.13}$$

这里 $f(t)=\cos nt$, $h(t)=\cos t$, $h'(0)=0$, $h''(0)=-1$, 满足定理条件按定理得

$$I_n(x)\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x \tag{2.2.14}$$

[例 2.2.2] 求 Legendre 多项式的渐近表示

$$P_n(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right]^n d\theta, \qquad n\to\infty \tag{2.2.15}$$

它相当于如下形式的积分

$$J(x)=\int_0^b f(t)\left[\Phi(t)\right]^x dt=\int_0^b f(t)e^{x\ln\Phi(t)}dt, \qquad x\to\infty \tag{2.2.16}$$

这里 $h(t)=\ln\Phi(t)$, 在 $\Phi(t)$ 极值点 a, $h(t)$ 也是极值点, 且有 $h'(a)=\Phi'(a)/\Phi(a)$, $h''(a)=\Phi''(a)/\Phi(a)$. 按 Laplace 积分定理可得

$$J(x)\sim f(a)\left[\Phi(a)\right]^x\sqrt{\frac{-\pi\Phi(a)}{2x\Phi''(a)}}=f(a)\left[\Phi(a)\right]^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{-\pi}{2x\Phi''(a)}} \tag{2.2.17}$$

将上述结果应用于 (2.2.15) 得

$$\begin{aligned} P(\mu)\ &\sim\ \frac{1}{\pi}\left[\mu+(\mu^2-1)\right]^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2n(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}} \\ &=\sqrt{\frac{1}{2n\pi}}\frac{\left[\mu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{n+\frac{1}{2}}}{(\mu^2-1)^{1/4}} \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

[例 2.2.3] 求下述积分

$$I(x)=\int_0^{10}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt \tag{2.2.19}$$

完全的渐近展开

$$I(x)=\int_0^{\delta}\frac{e^{-xt}}{1+t}dt+EST=\int_0^{\delta}e^{-xt}\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n t^n dt+EST$$

再看积分

$$\int_{\delta}^{\infty}e^{-xt}t^n dt=\frac{1}{x^{n+1}}\int_{\delta x}^{\infty}e^{-u}u^n du$$

由不完全 γ 函数的量阶估计

$$\int_{\delta}^{\infty}e^{-xt}t^n dt=\frac{1}{x^{n+1}}O(e^{-x\delta}(x\delta)^n)=O(\frac{1}{x}e^{-x\delta}) \tag{2.2.20}$$

所以

$$I(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n)dt+EST \tag{2.2.21}$$

逐项积分

$$I(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \tag{2.2.22}$$

现在，我们再比较深入地讨论 Laplace 积分的几种情况：

1. 变驻点的情况．在计算如下形式积分时，

$$I(x)=\int_a^b f(t)e^{h(x,t)}dt \tag{2.2.23}$$

函数 $h(x,t)$ 的驻点往往与 x 有关．这时，不能直接应用已有的定理，要事先做适当的变换，使驻点固定不变后，再应用 Laplace 积分定理，我们可以用下说明：

[例 2.2.4]　求 Γ 函数或阶乘的渐近展开．根据定义

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{\infty}x^s e^{-x}dx=\int_0^{\infty}e^{s\ln x-x}dx,\qquad x\to\infty \tag{2.2.24}$$

上述积分原先无驻点，经改造后，函数 $s\ln x - x$ 在 $x = s$ 处有驻点，即依赖于大参数 s. 因此，在变换 $u = x/s$ 下，驻点就固定了. 这时，式 (2.5.8) 变成

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1}\int_0^\infty e^{s(\ln u - u)}du, \qquad s\to\infty \tag{2.2.25}$$

函数 $h(u) = \ln u - u$, 在 $u = 1$ 处有极大值，直接应用 Laplace 积分定理，并考虑到 $u = 1$ 是内点，应含一个 2 的因子，即

$$\Gamma(s+1) \sim s^{s+1}e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}} = \sqrt{2\pi}s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}$$

或

$$\ln s! \sim (s+\frac{1}{2})\ln s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{2.2.26}$$

该式与式 (1.1.6) 一致，即 Sterling 公式.

2. 二阶导数成直至 $p-1$ 阶导数为零的情况.

$$I = \int_a^b f(t)e^{xh(t)}dt = f(a)e^{xh(a)}\int_0^\infty e^{\frac{xh^{(p)}(a)t^p}{p!}}dt + EST$$

这里误差估计不予赘述，对上式中积分用 Γ 函数来表示，可得

$$I \sim f(a)e^{xh(a)}\left[\frac{p!}{-xh^{(p)}(a)}\right]^{\frac{1}{p}}\frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{p} \tag{2.2.27}$$

Laplace 积分定理只是式 (2.2.27) 的特例. 同样地，请读者考虑极值点在端点 b 或内点的情况.

3. $f(a) = 0$ 的情况，譬如说 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(q-1)}(a) = 0, f^{(q)}(a) \neq 0$

$$I = \int_a^b f(t)e^{xh(t)}dt \sim \frac{f^{(q)}(a)}{q!}e^{xh(a)}\int_0^\infty t^q e^{xh'(a)t}dt$$

$$= \frac{f^{(q)}(a)}{q!} e^{xh(a)} \left[-\frac{1}{xh'(a)} \right]^{q+1} \Gamma(q+1) \tag{2.2.28}$$

$$= f^{(q)}(a) e^{xh(a)} \left[-\frac{1}{xh'(a)} \right]^{q+1}$$

4. $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(q-1)}(a) = 0$, $f^{(q)}(a) \neq 0$, $h'(a) = h'(a) = \cdots = h^{(p-1)}(a) = 0$, $h^{(p)}(a) \neq 0$ 的情况不难证明

$$I \sim \frac{f^{(q)}(a)}{q!} e^{xh(a)} \left[\frac{p!}{-xh'(a)} \right]^{\frac{q+1}{p}} \frac{\Gamma(\frac{q+1}{p})}{p} \tag{2.2.29}$$

5. 高阶近似法. 若要得到完全的渐近展开，可以用 Taylor 展开和反函数方法获得，这里，我们先用例子来说明.

[例 **2.2.5**]　求积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin^2 t} dt \tag{2.2.30}$$

$x \to \infty$ 时的完全渐近展开式

解一：　Taylor 展开法，$-\sin^2 t$ 在 $t = 0$ 有极大值，在 $t = 0$ 附近

$$\sin^2 t = t^2 (1 - \frac{t^2}{3} + \frac{2}{45} t^4 - \cdots)$$

代入 (2.2.30), 展开 Taylor 级数，并按 x^{-k} 次幂归并同类项得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xt^2} \left[1 + \frac{xt^4}{3} + (\frac{x^2 t^8}{18} - \frac{1}{45} xt^6) + \cdots \right] dt$$

$$O(\frac{1}{x}) \qquad O(\frac{1}{x^2})$$

在变换 $w = xt^2$ 下

$$I = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-w} \left[w^{-\frac{1}{2}} + \frac{w^{\frac{3}{2}}}{3x} + \frac{1}{x^2} (\frac{w^{\frac{7}{2}}}{18} - \frac{2w^{5/2}}{45}) + \cdots \right] dw$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(1+\frac{1}{4x}+\frac{9}{32x^2}+\cdots) \tag{2.2.31}$$

解二:　　令 $\sin t = u$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-xu^2}}{\sqrt{1-u^2}}du = \int_0^1 e^{-xu^2}(1+\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{8}u^4+\cdots)du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_b^\infty e^{-w}(w^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2x}w^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8x^2}w^{3/2}+\cdots)dw$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(1+\frac{1}{4x}+\frac{9}{32x^2}+\cdots) \tag{2.2.32}$$

下面讨论高阶近似的一般公式.

定理:　在任一区间 $[a+\varepsilon,\ b]$ 中, 满足引理 1 的条件, $h(t)$, $f(t)$ 在 $t=a$ 附近解析, 且 $h(a)$ 为最大值, $h'(a)=h''(a)=\cdots=h^{(p-1)}(a)=0$, $h^{(p)}(a)\neq 0$; $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(q-1)}(a)=0$, $f^{(q)}(a)\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b f(t)\exp[xh(t)]\,dt \\ &\sim e^{xh(a)}\left[\frac{a_1}{x^{\frac{q+1}{p}}}+\frac{a_2}{x^{\frac{q+2}{p}}}+\frac{a_3}{x^{\frac{q+3}{p}}}+\cdots\right] \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

式中, a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 均可由 $f(t)$, $h(t)$ 在 a 处的各阶导数来表达.

证: 由引理 1

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{a+\varepsilon} f(t)\exp[xh(t)]\,dt \\ &\quad +O(\frac{1}{x}\exp[x\max(h(a+\varepsilon),\ h(b))]) \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

下面, 我们可以知道, (2.2.34) 式中第一项为 $O(\frac{1}{x^{\frac{q+1}{p}}}\exp[xh(a)])$, 第二项与它相比是超越小的, 可以略去. 再由 $f(t)$, $h(t)$ 在 a 附近

的解析条件可知

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\exp[xh(t)]\,dt = \exp[xh(a)]\int_0^{\varepsilon}\left[\left(\frac{f^{(q)}(a)}{q!}u^q\right.\right.$$

$$+\frac{f^{(q+1)}(a)}{(q+1)!}u^{q+1}+\cdots)(1+\frac{xh^{p+1}(a)u^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{xh^{p+2}(a)u^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots$$

$$\left.+\frac{x^2}{2!}\frac{\left[h^{p+1}(a)\right]^2u^{2p+2}}{[(p+1)!]^2}+\cdots)\right]\exp\left[x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}u^p\right]du$$

因为 $h(a)$ 为最大值，$h^{(p)}(a)<0$，作变换

$$w=-x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}u^p$$

并以 x 降幂排列，可得

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\exp[xh(t)]\,dt$$

$$=\exp[xh(a)]\int_0^{\varepsilon'}\left[\frac{A_1(w)}{x^{\frac{q+1}{p}}}+\frac{A_2(w)}{x^{\frac{q+2}{p}}}+\cdots\right]e^{-w}dw \qquad (2.2.35)$$

其中 $\varepsilon'=-x\dfrac{h^{(p)}(a)}{p!}\varepsilon^p$，以及

$$A_1(w)=\frac{1}{p}\left[-\frac{p!}{h^{(p)}(a)}\right]^{\frac{q+1}{p}}\frac{f^q(a)}{q!}w^{\frac{q+1}{p}-1}$$

$$A_2(w)=\frac{1}{p}\left[-\frac{p!}{h^{(p)}(a)}\right]^{\frac{q+2}{p}}\left[\frac{f^{q+1}(a)}{(q+1)!}-\frac{f^{(q)}(a)h^{(p+1)}(a)}{q!(p+1)h^{(p)}(a)}w\right]w^{\frac{q-2}{p}-1}$$

$$A_3(w)=\frac{1}{p}\left[-\frac{p!}{h^{(p)}(a)}\right]^{\frac{q-3}{p}}\left[\frac{f^{(q+2)}(a)}{(q+2)!}\right.$$

$$-\left(\frac{f^{(q+1)}(a)h^{(p+1)}(a)}{(q+1)!(p+1)h^{(p)}(a)}+\frac{f^{(q)}(a)h^{(p+2)}(a)}{q!(p+1)(p+2)h^{(p)}(a)}\right)w$$

$$+\frac{f^{(q)}(a)\left[h^{(p+1)}(a)\right]^2}{2!q!(p+1)^2\left[h^{(p)}(a)\right]^2}w^2\Bigg]w^{\frac{q+3}{p}-1} \tag{2.2.36}$$

……

依此类推．由于

$$\int_0^{\varepsilon} w^n \exp(-w)dw = \int_0^{\infty} - \int_{\varepsilon'}^{\infty} w^n \exp(-w)dw \tag{2.2.37}$$

以及

$$\gamma(a,\ x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}\exp(-t)dt = O\left[x^{a-1}\exp(-x)\right] \tag{2.2.38}$$

并且当 $x \to +\infty$ 时， $\varepsilon' \to +\infty$, 故而积分 (2.2.37) 式的第二项为超越小量，可以略去．由此可得

$$I \sim \exp\left[xh(a)\right]\left(\frac{a_1}{x^{\frac{q+1}{p}}} + \frac{a_2}{x^{\frac{q+2}{p}}} + \frac{a_3}{x^{\frac{q+3}{p}}} + \cdots\right) \tag{2.2.39}$$

式中

$$a_i = \int_0^{\infty} A_i(w)\exp\left[-w\right]dw \tag{2.2.40}$$

定理得证．由于 $A_i(w)$ 为 w 之多项式， a_i 可用 Γ 函数进行计算．

上述结果也可令

$$\frac{h^{(p)}(a)}{p!}(t-a)^p + \frac{h^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}(t-a)^{p+1} + \cdots = -w$$

直接导出．在有多个极值点．且极值大也相等时，则应根据 x 幂的阶次来决定主要部分及完全的渐近展开．

2.3 驻相法

我们考虑另一类被积函数显示高速振荡性态的积分

$$I = \int_a^b f(t)e^{ixh(t)}dt, \qquad x \to \infty \tag{2.3.1}$$

对这类积分也可以进行渐近估计. 积分的主要部分出来自于驻点附近的积分 (不一定是极大值), 它的原理却是 Laplace 方法截然不同. 我们同样可以直观地进行分析.

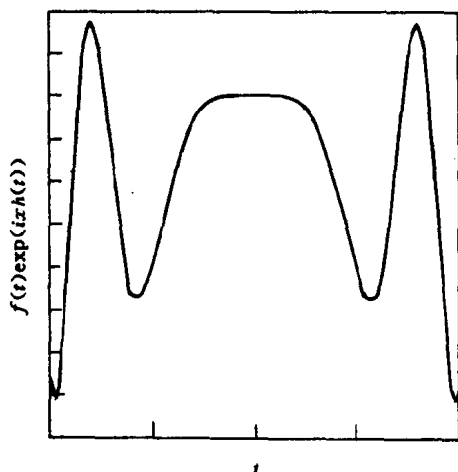


图 2.3.1 驻相法的几何解释

从图 2.3.1 可明显地看到, 当 $x \to \infty$ 时, $e^{ixh(t)}$ 代表了高速振荡因子. 如果无驻相点, 上述积分在内点处由于互相抵消几乎为零, 主要贡献来自边界附近区域的积分; 在有驻相点时, 由于在该点附近振荡减慢, 所以该点附近区域的积分将作出主要贡献. 这就是驻相点法的几何实质.

广义 Riemann–Lebesgue 引理: 若函数 $|f(t)|$ 可积, $h(t)$ 连续可微, $h(t)$在区间 $[a, b]$ 的任一子区间上不为常数, 那么

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^b f(t) e^{ixh(t)} dt = 0 \tag{2.3.2}$$

引理: 若在区间 $[a, b]$ 中, $h'(t)$, $h''(t)$ 存在, $h'(t) \neq 0$, $f'(t)$

存在，$(\frac{f}{h'})'$ 绝对可积，$f(a)\cdot f(b)\neq 0$, 则积分

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int_a^b f(t)e^{ixh(t)}dt \\
&= f(b)\frac{e^{ixh(b)}}{ixh'(b)} - f(b)\frac{e^{ixh(a)}}{ixh'(a)} + o(\frac{1}{x})
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

由分部积分

$$
I(x) = f(b)\frac{e^{ixh(b)}}{ixh'(b)} - f(a)\frac{e^{ixh(a)}}{ixh'(a)} + r(x)
$$

估计余项量阶，由

$$
r(x) = \frac{1}{x}\int_a^b \left[\frac{f(t)}{h'(t)}\right]' e^{ixh(t)}dt \tag{2.3.4}
$$

以及广义 Riemann–Lebesgue 引理，该积分趋于零，所以 $r(x) = o(\frac{1}{x})$, 引理得证.

注意，由于指数项代表高速振荡部分，所以不像 Laplace 积分那样，仅保留一项即可，而要把两项同量阶的都保留下来.

现在讨论有驻相点的情形，按 Riemann–Lebesgue 引理也应趋于零，但速度要更慢些.

驻相积分定理：对于积分

$$
I(x) = \int_a^b f(t)e^{ixh(t)}dt \tag{2.3.5}
$$

被积函数中 $f(t)$, $h(t)$ 解析，$f(a)\neq 0$ $h'(a) = 0$ $h''(a)\neq 0$ 其余各点 $h'(t)\neq 0$. 且满足引理条件 $\left|(\frac{f}{h'})'\right|$ 可积，我们有

$$
I(x) \sim f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2x\left|h''(a)\right|}}e^{i\left[xh(a)+\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}h''(a)\right]} \tag{2.3.6}
$$

这里 sgn$x$ 为符号函数， $x>0$ 取 $1, x<0$ 取 -1.

证明： 由引理

$$I(x)=\int_a^{a+\delta} f(t)e^{ixh(t)}dt+O(\frac{1}{x}) \tag{2.3.7}$$

首先假定 $h''(a)>0$, 作变换 $h(t)=h(a)+u^2$

$$I(x)=e^{ixh(a)}\int_0^{\varepsilon} f(t)\frac{dt}{du}e^{ixu^2}du+O(\frac{1}{x})$$

由于

$$\frac{dt}{du}=\sqrt{\frac{2}{h''(a)}}+\sum_{i=1}^{\infty}C_iu^i$$

$$f(t)=f(a)+\sum_{i=1}^{\infty}f_iu^i$$

所以

$$I(x)=e^{ixh(a)}\int_0^{\varepsilon}\left[f(a)\sqrt{\frac{2}{h''(a)}}+u\psi(u)\right]e^{ixu^2}du++o(\frac{1}{x}) \tag{2.3.8}$$

其中 $\psi(u)$ 为解析函数. 由分部积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon} u\psi(u)e^{ixu^2}du &= \frac{1}{2ix}\left\{\left[e^{ix\varepsilon^2}\psi(\varepsilon)-\psi(o)\right]-\int_0^{\varepsilon}\psi'(u)e^{ixu^2}du\right\}\\ &=O(\frac{1}{x})\end{aligned}$$

所以，如果驻相定理成立， $O(\frac{1}{x})$ 可略去，可得

$$I(x)\sim e^{ixh(a)}f(a)\sqrt{\frac{2}{h''(a)}}\int_0^{\varepsilon}e^{ixu^2}du \tag{2.3.9}$$

沿着图 2.3.2 的扇形路径计算围道积分

$$\oint e^{ixu^2}du = 0$$

但

$$\oint = \int_0^{\varepsilon} + \int_{CR} + \int_{\varepsilon e^{\frac{\pi}{4}i}}^{o} e^{ixu^2}du$$

其中

$$\left|\int_{C_R} e^{ixu^2}du\right| \le \left|\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{4}} Re^{-xR^2\sin 2\theta}d\theta\right| \qquad (2.3.10)$$

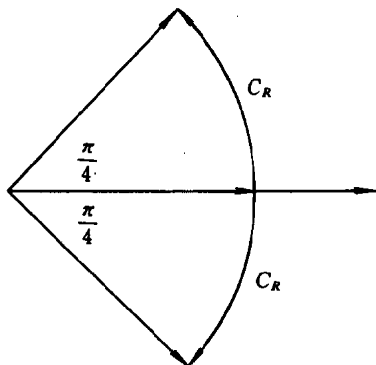


图 2.3.2 驻相法的积分路径

估计第一个积分

$$|J_1| \approx \left|\int_0^{\delta} Re^{-2xR^2\theta}d\theta\right| = \left|\frac{1-e^{-2xR^2\delta}}{2xR}\right| = O(\frac{1}{x}), \quad 当x\to\infty \qquad (2.3.11)$$

$$|J_2| \le \frac{\pi}{4}Re^{-xR^2\sin 2\delta} = EST, \qquad 当x\to\infty \qquad (2.3.12)$$

所以，在 $O(\frac{1}{x})$ 精确度内，

$$\int_0^{\varepsilon} e^{ixu^2} du = \int_0^{\varepsilon e^{\frac{\pi}{4}i}} e^{ixu^2} du$$

也就是说

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon} e^{ixu^2} du &= e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\varepsilon} e^{-xr^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{x}\varepsilon} e^{-u^2} du/\sqrt{x} \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du + O(e^{-x^2}/\sqrt{x}) \right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{i\frac{\pi}{4}} + EST\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

这样，由 (2.3.9), (2.3.13)

$$I = f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2xh''(a)}} e^{i(\frac{\pi}{4}+xh(a))} + O(\frac{1}{x}) \tag{2.3.14}$$

对于 $h''(a) < O$ 时，应作变换 $h(t) = h(a) - u^2$, 于是围道应取第四象限内的扇形区

$$I = f(a)\sqrt{\frac{\pi}{-2\pi h''(a)}} e^{i(-\frac{\pi}{4}+xh(a))} + O(\frac{1}{x}) \tag{2.3.15}$$

所以，(2.3.14), (2.3.15) 可统一表达为驻相积分定理

$$I \sim f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2x\,|h''(a)|}} e^{i\left[xh(a)+\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}h''(a)\right]} \tag{2.3.16}$$

定理得证. 对于驻点为右端 b 或内点 c 的情况，请读者考虑.

[**例 2.3.1**]　求 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)dt, \qquad x \to \infty \tag{2.3.17}$$

的渐近表示.

我们先将积分表示成适合于用驻相原理的形式，即

$$J_n(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i(x\sin t - nt)}dt\right]$$

这里，记号 Re 表示实部，$h(t) = \sin t$，$f(t) = e^{-int}$，驻相点在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处，这 $\sin''(t) = 1$，由公式 (2.3.6)

$$J_n(x) \sim \mathrm{Re}\left[\frac{2}{\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{4}) \tag{2.3.18}$$

因为是内点，所以要有一个 2 的因子.

现在讨论高阶近似一般公式.

定理：在任一区间 $[a+\varepsilon,\ b]$ 中，满足引理 1 的条件，$h(t)$，$f(t)$ 在 $t = a$ 附近解析，且 $h'(a) = h''(a) = \cdots = h^{(p-1)}(a) = 0, h^{(p)}(a) \neq 0$；$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(q-1)}(a) = 0$，$f^{(q)}(a) \neq 0$，我们有

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b f(t)\exp[ixh(t)]\,dt \sim \exp\left[ixh(a) + \frac{\pi i}{2p}\mathrm{sgn}h^{(p)}(a)\right] \\ &\times \left[\frac{b_1}{x^{\frac{q+1}{p}}} + \frac{b_2}{x^{\frac{q+2}{p}}} + \cdots + \frac{b_{p-q-1}}{x^{\frac{p-1}{p}}}\right] + O(\frac{1}{x}) \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

证. 根据引理

$$J = \int_a^{a+\varepsilon} f(t)\exp[ixh(t)]\,dt + O(\frac{1}{x})$$

我们将 t 看作为复数，采用改变围道的方法计算第一积分. 应按照 $h^{(p)}(a) \leq 0$, 取积分围道为上半面或下半平面的扇形围道，不妨设 $h^{(p)}(a) > 0$, 由于被积函数是解析的，所以

$$J = \int_a^{a+\varepsilon\exp\left[i\frac{\pi}{2p}\right]} f(t)\exp[ixh(t)]\,dt + \int_{C_\varepsilon} f(t)\exp[ixh(t)]\,dt$$

我们先估计第二积分

$$|J_2| \leq M\int_0^{\frac{\pi}{2p}} \exp\left[-x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}\varepsilon^p\sin p\theta\right]d\theta \tag{2.3.20}$$

仿照文献 (Nayfeh 1981), 将上述积分区间分成 $[0,\ \delta]$, $\left[\delta,\ \frac{\pi}{2p}\right]$ 两个子区间

$$
\begin{aligned}
J_{21} &= \int_0^{\delta} \exp\left[-x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}\varepsilon^p \sin p\theta\right] d\theta \\
&\le \int_0^{\delta} \exp\left[-x\frac{h^{(p)}(a)\varepsilon^p\theta}{(p-1)!}\right] d\theta = O(\frac{1}{x})
\end{aligned} \tag{2.3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{22} &= \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2p}} \exp\left[-x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}\varepsilon^p \sin p\theta\right] d\theta \\
&\le \frac{\pi}{2p} \exp\left[-x\frac{h^{(p)}(a)}{p!}\varepsilon^p \sin p\delta\right]
\end{aligned} \tag{2.3.22}
$$

这是超越小的, 可以略去.

现在来计算第一积分, 在变换 $t = a + u\exp(\frac{\pi i}{2p})$ 下

$$
J_1 = \exp\left[ixh(a) + \frac{\pi i}{2p}\mathrm{sgn}h^{(p)}(a)\right] \int_0^{\varepsilon} \overline{f}(u) \exp\left[-\frac{xh^{(p)}(a)u}{p!}\right]^p du \tag{2.3.23}
$$

式中

$$
\overline{f}(u) = f(t)\exp\left[ix(\frac{h^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}t^{p+1} + \cdots)\right]\Bigg|_{t=a+u\exp(\frac{i\pi}{2p})} \tag{2.3.24}
$$

在 (2.3.23) 式的积分中含有因子 $\exp(-\frac{xh^{(p)}u^p}{p!})$, 因此可以如 (2.2.33) 一样用 Laplace 方法求渐近展开. 注意到已被略去的项为 $O(\frac{1}{x})$, 所以这种渐近展开只能如 (2.3.19) 式那样, 准确到 $O(\frac{1}{x})$. 定理得证. 这里要求 $(q+1) < p$ 的原因是, 只有在此时, a 点邻域的积分才比略去的 $O(\frac{1}{x})$ 的项大, 当 $q+1 \ge p$ 时, 略去 $O(\frac{1}{x})$ 阶的项是不允许的, 这时, 积分依然是 $O(\frac{1}{x})$ 量阶的.

从上面的论述，我们看到，驻相法与 Laplace 方法纵然在形式上有相似之处，本质是完全不同的．它们的主要区别为

(1) Laplace 积分的主要贡献来自 $h(t)$ 最大值邻域内的积分；驻相积分的主要贡献来自所有极值点邻域的积分．

(2) Laplace 积分公式不存在相移；驻相积分公式中存在相移．

(3) Laplace 积分略去的项是超越小的高阶项 EST；驻相积分略去的是 $O(\frac{1}{x})$，所以对后者求高阶近似没有意义．

2.4 最陡下降法

我们要将上述方法推广到复平面上的积分，即研究形如

$$I(x) = \int_c f(z)e^{xh(z)}dz \qquad x \to \infty \tag{2.4.1}$$

的积分．这里函数 $f(z)$，$h(z)$ 均为复平面上的解析函数，由于复平面上积分可以改变路径，譬如：可以选 $h(z)$ 的实部 $\mathrm{Re}h(z)$ 或 $h(z)$ 的虚部 $\mathrm{Im}h(z)$ 为常数的路径，这时问题就化成驻相积分或 Laplace 积分．由于上节末提到的 Laplace 积分要优于驻相法，所以一般取 $\mathrm{Im}h(z) =$const 的路径．

令

$$h(z) = \varPhi(z) + i\psi(z)$$

在该路径上 $\psi(z) = \mathrm{const}$，故

$$I(x) = e^{ix\psi}\int_{C^1} f(z)e^{x\varPhi(z)}dz \tag{2.4.2}$$

这里，$\varPhi(z)$ 是实数我们便可用 Laplace 方法来处理．一般说来，实部，虚部为常数的曲线族构成交曲线网，这是因为曲线族

$$\varPhi = \mathrm{const}$$

$$\psi = \mathrm{const}$$

法线的交角为

$$\cos^{-1}\frac{\nabla\phi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\phi|\,|\nabla\psi|}=\frac{\pi}{2}.$$

这只要由调和函数 Φ, ψ 满足 Cauchy-Riemann 条件

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{-\partial\psi}{\partial x}$$

即可导出.

由于 $\psi(z)$ =const 沿着 $\Phi(z)$ =const 曲线的法线方向，我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l}=\frac{\partial\Phi}{\partial n}\cos(n,\ l)$$

所以，虚部为常数的曲线为实部变化最大的曲线方向.

存在两种情况：一是沿 ψ =const 曲线， Φ 没有极值点，那么积分来自端点附近积分的贡献；二是存在极值点的情况，这时因 $f'(z)=0$, 所以 $\nabla^2\phi=\nabla^2\psi=0$, 即

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \tag{2.4.3}$$

所以，该点只是一个鞍点. 有时，我们找到了鞍点后，积分主要由该点附近的积分所贡献，这种方法叫鞍点法 (saddle point method)

以两阶导数不为零的情况为例：

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_C f(z)e^{xh(z)}dz = e^{xh(z_0)}\int\limits_{C'} f(z)e^{\frac{x}{2}h''(z_0)(z-z_0)^2}dz \\ &\sim e^{xh(z_0)}\int\limits_{C'} f(z_0)e^{\frac{x}{2!}\left|h''(z_0)\right|e^{i\alpha w^2}}dw \\ &= e^{xh(z_0)}f(z_0)e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x}{2}\left|h''(z_0)\right|s^2}ds \\ &= e^{xh(z_0)}f(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{|h''(z_0)|x}}e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})i} \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

$$= e^{xh(z_0)} f(z_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{h''(z_0)x}}$$

这就是鞍点法公式, 公式 (2.2.5),(2.3.6) 均为该式之特例. 而 $(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})$ 刚好是最陡下降方向.

我们来看一般的最陡下降方向的分布. 若 $h'(z_0) = h''(z_0) = \cdots = h^{(m-1)}(z_0) = 0$, $h^{(m)}(z_0) \neq 0$, 于是

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{m!} h^m(z_0)(z - z_0)^m + \cdots \tag{2.4.5}$$

由于

$$(z - z_0)^m = r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

不妨假定 $\operatorname{Arg} h^{(m)}(z_0) = 0$, 否则, 将讨论中的图形转一个辐角即可, 这时可得

$$\theta = \frac{k}{m}\pi$$

为虚部是常数的方向, 其中

$$k = 1,\ 3,\ 5, \cdots, (2m-1)$$

为最陡下降方向, 共 m 个. 此外

$$k = 0,\ 2,\ 4, \cdots, 2m$$

为最陡上升方向, 也有 m 个, 下图可以给读者一些直观的印象.

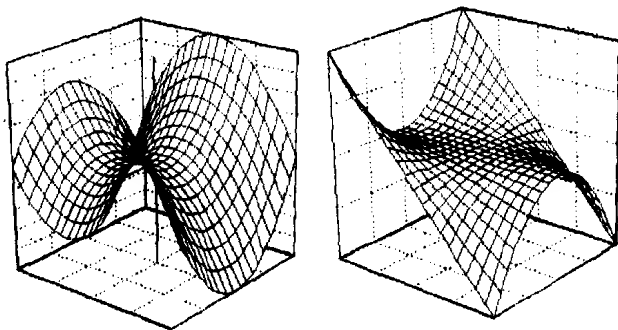


图 2.4.1 最陡下降方向

按照 Debye 的方法，可将 $h(z)$ 写成

$$h(z) = h(z_0) - (z - z_0)^m g(z) \tag{2.4.6}$$

因为沿最陡下降方向，虚部为常数，实部下降，故可令

$$(z - z_0)^m g(z) = t^m$$

式中

$$g(z) = g_0 + g_1(z - z_0) + \cdots$$

为解析函数， $g_0 \neq 0$, 于是

$$(z - z_0)R(z) = t \tag{2.4.7}$$

式中

$$R(z) = \sqrt[m]{g(z)} = R_0 + R_1(z - z_0) + \cdots \tag{2.4.8}$$

式中 R_0 必等于 $g_0^{\frac{1}{m}}$ 的主值，可由 (2.4.7) 用待定系数法求反函数

$$z = z_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots \tag{2.4.9}$$

也可由 Lagrange 展开公式求出系数

$$C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{R(z)} \right]^n \Bigg|_{z=0} \tag{2.4.10}$$

要是 (2.4.9) 中之 t 以 $t\omega$ 代替 (ω 为 1 的某个 m 次根), 可以得到另外几个反函数，这代表了不同的最陡下降路径，于是

$$I = e^{xh(z_0)} \int_0^\infty e^{-xt^m} \sum_{n=0}^\infty A_n t^n dt \tag{2.4.11}$$

式中

$$f(z) \frac{dz}{dt} = \sum_{n=0}^\infty A_n t^n \tag{2.4.12}$$

从式 (2.4.11) 积分便可得完全的渐近展开式.

[例 **2.4.1**]　用最陡下降法求 Γ 函数完全的渐近展开式. 由式 (2.2.25)

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= s^{s+1}\int_0^\infty e^{s(\ln u-u)}du \\
&= s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{s(\ln u-u+1)}du \\
&= s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-st^2}\frac{du}{dt}dt
\end{aligned}
\tag{2.4.13}
$$

这里

$$
(u-1)\left[\frac{-1+u-\ln u}{(u-1)^2}\right]^{1/2}=t
$$

即

$$
R(u)=\frac{\sqrt{u-1-\ln u}}{u-1}
\tag{2.4.14}
$$

所以

$$
C_1=\sqrt{2},\ C_2=\frac{2}{3},\quad C_3=\frac{2}{18},\quad C_4=\frac{2}{135},\quad C_5=\frac{\sqrt{2}}{1080},\cdots
$$

代入 (2.4.13) 得

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= s^{s+1}e^{-s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st^2}(\sqrt{2}+\frac{4}{3}t+\frac{\sqrt{2}}{6}t^2 \\
&\quad -\frac{8}{135}t^3+\frac{\sqrt{3}}{216}t^4\cdots)dt \\
&= s^{s+1}e^{-s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}}(1+\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}+\cdots)
\end{aligned}
\tag{2.4.15}
$$

由此导出

$$
\ln(s+1)=(s+\frac{1}{2})\ln s-s+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{12s}-\frac{1}{360s^2}+\cdots
\tag{2.4.16}
$$

这与公式 (1.1.6) 一致.

[例 **2.4.2**]　求积分

$$I = \int_0^1 \ln t e^{ixt} dt \tag{2.4.17}$$

该积分无驻相点, 又不能用分部积分, 因此用过去的方法均有困难. 但我们将上式看作复变量的积分, 采用最陡下降法来求完全的渐近表达式.

问题的关键在于如何选取围道. 由于函数 it 在 $t=0$, 1 之虚部本来不相等, 所以必须用两条最陡下降路线, 然后, 再用一条线将该两路径连接起来, 所以连线上的积分必须是已知的或趋于零的. 我们取的路径如图 2.4.2 所示.

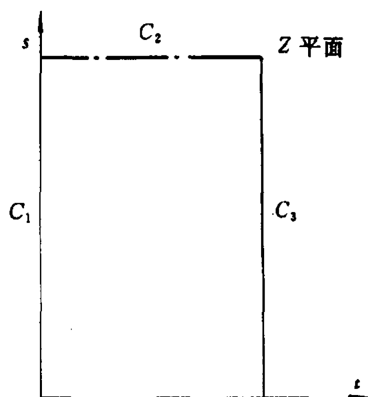


图 2.4.2　最陡下降路线

容易证明, 在 C_2 上的积分当 $x \to \infty$ 时趋于零. 因此

$$I = \int_{C_1} + \int_{C_3} \ln t e^{ixt} dt \tag{2.4.18}$$

在曲线 C_1 上， $t = is$

$$I_1 = i\int_0^\infty e^{-xs}\ln s i ds = \frac{i}{x}\int_0^\infty e^{-u}(\ln u - \ln x + \frac{\pi}{2}i)du = -i\frac{\ln x}{x} - \frac{\frac{\pi}{2}+i\gamma}{x} \tag{2.4.19}$$

其中恒等式 $\gamma = -\int_0^\infty e^{-u}\ln u du$, γ 为 Euler 常数 0.5772. 在 C_2 上， $t = 1 + si$

$$\begin{aligned} I_2 &= -i\int_0^\infty \ln(1+si)e^{ix(1+si)}ds \\ &= -ie^{ix}\int_0^\infty e^{-xs}\sum_{n=1}^\infty \frac{(si)^n(-1)^{n-1}}{n}ds \\ &= ie^{ix}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-i)^n}{x^{n+1}}(n-1)! \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

将 I_1 与 I_2 相加，得

$$I \sim -\frac{i\ln x}{x} - \frac{\frac{\pi}{2}+i\gamma}{x} + ie^{ix}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-i)^n(n-1)!}{x^{n+1}} \tag{2.4.21}$$

2.5　Airy 函数和 Stokes 现象

本节我们要用鞍点法求 Airy 函数的渐近表示．该函数定义如下：

$$u''(z) - zu = 0 \tag{2.5.1}$$

我们用 Laplace 变换求解，即令

$$u = \tilde{f} = \int_C e^{z\zeta}f(\zeta)d\zeta \tag{2.5.2}$$

显然，它有如下性质：

$$1.\ \ u'(z) = \widetilde{\zeta f} \tag{2.5.3}$$

$$2.\ \ zu(z) = -\widetilde{f'(\zeta)} \tag{2.5.4}$$

性质 1 是明显的，不予证明，由于

$$zu(z) = \int_C f(\zeta) de^{z\zeta} = f(\zeta)e^{z\zeta}|_C - \int_C f'(\zeta)e^{z\zeta} ds \tag{2.5.5}$$

可见，性质成立的条件是 C 为闭曲线或 $f(\zeta)e^{z\zeta}$ 在 C 两端的值相等或都趋于零. 在上述变换下， Airy 方程变换成

$$\int_C \left[\zeta^2 f(\zeta) + f'(\zeta)\right] e^{z\zeta} ds = 0 \tag{2.5.6}$$

所以，可取

$$f(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^3}{3}} \tag{2.5.7}$$

Airy 方程的解为

$$u(z) = \int_C e^{z\zeta - \frac{\zeta^3}{3}} ds \tag{2.5.8}$$

为了满足积分两端 $e^{z\zeta-\frac{\zeta^3}{3}}$ 为零之条件，要求主要部分

$$\mathrm{Re}\ \zeta^3 > 0 \tag{2.5.9}$$

也就是说， ζ 的辐角在下述范围：

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{6}\pi \\ \frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{3}{2}\pi \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

我们取典型路径如图 2.5.1 所示.

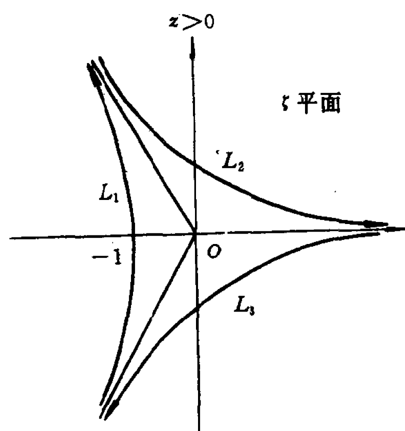


图 2.5.1　Airy 函数的积分路径

我们定义三类 Airy 函数

$$Ai_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} e^{z\zeta-\frac{1}{3}\zeta^3}d\zeta \tag{2.5.11}$$

通常，Airy 方程使用的两个独立解与上面定义的函数的关系为

$$Ai(z) = Ai_1(z) \tag{2.5.12}$$

$$Bi(z) = Ai_2(z) - Ai_3(z) \tag{2.5.13}$$

为了求 $Ai(z)$ 的渐近表示，首先如下变换：

$$\zeta = z^{1/2}s$$

使鞍点与 z 无关，这时积分 (2.5.11) 化成

$$2\pi i Ai(z) = z^{1/2}\int_{l_i} e^{z^{\frac{3}{2}}(s-\frac{s^3}{3})}ds \tag{2.5.14}$$

根据 $z\to\infty$ 时所在辐角范围，分两种情况讨论：

1. $z>0$, 此时 $s=-1$ 为鞍点，积分的主要贡献由公式 (2.4.4) 得出或对 s 作 Taylor 展开

$$2\pi iAi(z)=z^{1/2}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\int\limits_{L_1}e^{z^{3/2}(s+1)^2}ds=z^{1/2}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\int\limits_{L_1}e^{z^{3/2}w^2}dw$$

令 $w=u+iv$, 可知

$$w^2=(u^2-v^2)+2iuv$$

所以 $u=0$, 即沿着虚轴为最陡下降方向，可见

$$2\pi iAi(z)\sim z^{1/2}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}e^{\frac{\pi}{2}i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^{3/2}v^2}dv=\frac{i\sqrt{\pi}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{z^{1/4}} \tag{2.5.15}$$

即

$$Ai(z)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}\exp(-\frac{2}{3}z^{3/2}) \tag{2.5.16}$$

2. $z<0$, 在变换 $\zeta=z^{1/2}s$ 中，取 $\mathrm{Arg}z=\pi$

$$\zeta=|z|^{1/2}e^{\frac{\pi}{2}i}s=is|z|^{1/2}$$

所以，实际上积分路径 L_1 已经逆向转了 90°, 变成 L_1'

$$2\pi iAi(z)=i|z|^{1/2}\int\limits_{L_1'}e^{-i|z|^{3/2}(s-\frac{s^3}{3})}ds \tag{2.5.17}$$

$s=\pm1$ 依然是鞍点，但不在 L_1' 上，故积分路径要用 L_2', L_3' 来代替，它们是 L_2, L_3 逆转 90° 的结果，所以

$$2\pi iAi(z)=i|z|^{1/2}\int\limits_{-L_2'-L_3'}e^{-i|z|^{3/2}(s-\frac{s^3}{3})}ds \tag{2.5.18}$$

这里，在 L_2', L_3' 上各有一鞍点， $s=\pm1$:

$$-i(s-\frac{s^3}{3})=\begin{cases}\frac{2}{3}i-i(s+1)^2+ & \text{在 } L_2' \text{ 上 } s=-1\\ -\frac{2}{3}i+i(s-1)^2+ & \text{在 } L_3' \text{ 上 } s=1\end{cases}$$

而它们的最陡下降方向分别为 $-45°$ ($s=-1$ 处) 及 $45°$ ($s=1$ 处),

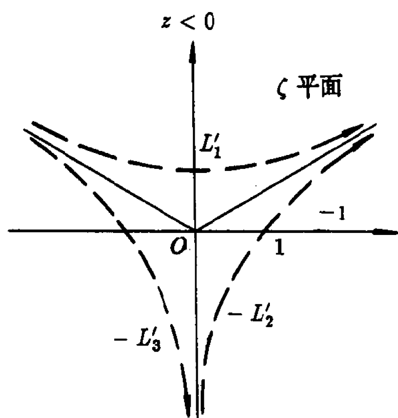


图 2.5.2 $z<0$ 时 Airy 函数的积分路径

所以,

$$2\pi i Ai(z)=i\sqrt{\pi}\,|z|^{-\frac{1}{4}}\left[e^{(\frac{2}{3}|z|^{3/2}-\frac{\pi}{4})i}+\epsilon^{(-\frac{2}{3}|z|^{3/2}-\frac{\pi}{4})i}\right] \qquad (2.5.19)$$

$$\begin{aligned} Ai(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,|z|^{\frac{1}{4}}}\cos(\frac{2}{3}|z|^{3/2}-\frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,|z|^{\frac{1}{4}}}\sin(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}) \end{aligned} \qquad (2.5.20)$$

所以, Airy 函数的渐近表示为

$$Ai(z)\sim\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\dfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) & z\to+\infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,|z|^{\frac{1}{4}}}\sin(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}+\dfrac{\pi}{4}) & z\to-\infty \end{cases} \qquad (2.5.21)$$

这里我们看到产生 Stokes 现象的一个原因是：当 z 的辐角改变时，使积分路径改变，从而使鞍点位置、数目、最陡下降方向改变所致.

在第四章，我们还要将从解微分方程的角度来看这一问题. 现在给出 Airy 函数在整个辐角范围内的渐近表达式 (见 4.4.5)

$$Ai(z) \sim a_1 z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n z^{-\frac{3}{2}n} + a_2 z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-\frac{3}{2}n} \tag{2.5.22}$$

式中 $C_0 = 1$, 以及

$$a_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} 0 & |\mathrm{Arg}z| < \dfrac{2}{3}\pi \\ \dfrac{i}{2\pi} & \dfrac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}z < \dfrac{5}{3}\pi \\ \dfrac{-i}{2\pi} & -\dfrac{5}{3}\pi < \mathrm{Arg}z < -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

显然，对于 z 为正数，负数 ($\mathrm{Arg}z = \pi$) 是公式 (2.5.22) 的特例，即包括了 (2.5.21) 在内，如果选择另外的常数还可以得到 $Bi(z)$.

这里还要说明一下，Airy 函数在负实轴上是振荡函数. 由于它与 $\sin(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})$ 的零点稍不重合，因此严格说来并不满足渐近的定义. 为此，我们必须在另一个意义上来理解它.

以下述函数为例

$$(1 + \frac{1}{x})\sin(x + \frac{1}{x}) \sim \sin x \tag{2.5.23}$$

由于左边函数的零点与右边函数重点 $n\pi$ 相偏离，即

$$x_n = n\pi - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3\pi^3} - \cdots$$

与 Airy 函数在负实轴上的情况非常类似. 但 (2.5.23) 式左右两个函数图形确实是非常接近的.

我们从两个角度来理解，对于振荡函数 $\sin u(x)$, 如果

$$u(x) \sim v(x) \tag{2.5.24}$$

我们就理解为

$$\sin u(x) \sim \sin v(x) \tag{2.5.25}$$

或者，将上述函数用和角公式展开

$$(1+\frac{1}{x})\sin(x+\frac{1}{x}) = (1+\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}\sin x + (1+\frac{1}{x})\sin\frac{1}{x}\cos x \tag{2.5.26}$$

由于 $x \to \infty$ 时，

$$(1+\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x} \sim 1 \tag{2.5.27}$$

$$(1+\frac{1}{x})\sin\frac{1}{x} \sim O(\frac{1}{x}) \tag{2.5.28}$$

所以

$$(1+\frac{1}{x})\sin(x+\frac{1}{x}) \sim \sin x + O(\frac{1}{x}) \tag{2.5.29}$$

这里式 (2.5.24), (2.5.27), (2.5.28) 都是符合通常 Poincaré 意义上的渐近定义的.

2.6 Watson 引理及其应用

我们考虑 Laplace 积分

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \tag{2.6.1}$$

p 为复数，上述积分在 $\mathrm{Re}\,p > S_0$ 的半平面上收敛，解析，其中 S_0 为 $f(t)$ 的增长指数，即

$$|f(t)| < Ke^{s_0 t} \tag{2.6.2}$$

现在要求 $|p| \to \infty$ 时， $F(p)$ 的渐近展开.

若 $f(t)$ 无穷次可微，用分部积分得

$$F(p) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{p^{m+1}}, \qquad |\mathrm{Arg}\ p| \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon \tag{2.6.3}$$

现在考虑 $f(t)$ 有支点的情况，这时可应用如下的 Watson 引理：

若 $f(t)$ 在 $|t| \leq R+\delta$, $|\text{Arg}\, t| \leq \Delta < \pi$ 内解析，并有如下的展开式：

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{\frac{m}{r}-1} \tag{2.6.4}$$

在 $t > R$ 时，式 (2.6.2) 成立．那么，$f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(p)$ 有渐近展开

$$F(p) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Gamma(\frac{m}{r}) p^{-\frac{m}{r}}, \qquad |\text{Arg}\, p| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \tag{2.6.5}$$

证明：

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} a_m \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\frac{m}{r}-1} dt \\ &\quad + (\int_0^{\infty} e^{-pt} (f(t) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m t^{\frac{m}{r}-1}) dt \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} a_m \Gamma(\frac{m}{r}) p^{-\frac{m}{r}} + R_M \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

由定理假定，我们可以做到

$$\left| f(t) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m t^{\frac{m}{r}-1} \right| \leq C e^{S_0 t} t^{\frac{M}{r}-1}$$

对于小 t 由 $f(t)$ 的收敛性可知这一点．对于大的 t, 由函数 $f(t)$ 的增长指数性质保证，于是

$$|R_M| \leq C \int_0^{\infty} e^{-(\text{Re}\, p - s_0)t} t^{\frac{M}{r}-1} dt = \frac{C}{(\text{Re}\, p - s_0)^{M/r}} \Gamma(\frac{M}{r}),$$
$$(\text{Re}\, p > s_0) \tag{2.6.7}$$

由于 $\operatorname{Arg} z < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, 故而 $\operatorname{Re} p \geq |p| \sin\varepsilon$, 所以只要

$$|p| > \frac{s_0}{\sin\varepsilon}$$

便有

$$\operatorname{Re} p > s_0$$

成立，由 (2.4.17)

$$\left|R_M \cdot p^{\frac{M}{r}}\right| \leq \frac{Cp^{\frac{M}{r}}\Gamma(\frac{M}{r})}{(|p|\sin\varepsilon - s_0)^{\frac{M}{r}}} \tag{2.6.8}$$

(2.6.8) 中有界函数，因此

$$R_M = O(p^{-\frac{M}{r}})$$

Watson 引理得证.

从形式上看， Watson 引理就是对 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有收敛展开式时，$F(p)$ 的渐近展开式可以用逐项积分的方法求出. 我们可将它应用于求 Laplace 的逆变换之渐近展开

(1) 若 $t \to 0$ 时， $f(t)$ 有形如 (2.6.4) 的展开式， $f(t)$ 又满足增长指数条件，那么我们可以从 $F(p)$ 在 $p \to \infty$ 处的渐近展开，得到 $f(t)$ 展开式的系数，即已知

$$F(p) \sim \sum_{m=1}^{\infty} C_m p^{-\frac{m}{r}} \tag{2.6.9}$$

那么，在小 t 时，

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\Gamma(\frac{m}{r})} t^{\frac{m}{r}-1} \tag{2.6.10}$$

(2) 求 $t \to \infty$ 时 $f(t)$ 的渐近展开. 由反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br} F(p)e^{pt}dt \tag{2.6.11}$$

其中 Br 为 Bromwioh 积分路径. 对于 $F(p)$ 在 $\mathrm{Re}\,p \le s_0$ 的左半平面有有限个奇点的情况，可用留数定理得

$$f(t)=\sum_{i=1}^{N} F(p_i)e^{p_i t} \sim F(p_i)e^{p_i t} \tag{2.6.12}$$

式中 p_1 为实部最大的奇点，其余各项与它相比均为超越小项.

对于 p_1 有支点的情况，积分路径如下：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_R}+\int_{C_r}+\int_{L_u+L_l} F(p)e^{pt}dt\right] \tag{2.6.13}$$

当 p 在 p_1 附近可表达为

$$F(p) \sim (p-p_1)^{-\nu}\sum_{k-0}^{\infty} a_k(p-p_1)^k \tag{2.6.14}$$

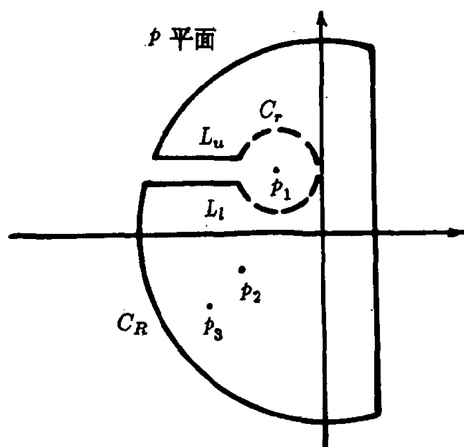


图 2.6.1　求 $F(p)$ 反变换的积分路径

若 $p\to\infty$ 时，$F(p)$ 一致地趋于零，由 Jordan 引理，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{pt}F(p)dp=0 \tag{2.6.15}$$

若 $\nu < 1$,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} e^{pt}F(p)dp = 0 \tag{2.6.16}$$

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{Lu+L_l} F(p)e^{pt}dp \tag{2.6.17}$$

若以 $p = p_1 + \eta e^{\pm\pi i}$, $dp = -d\eta$ 代入

$$f(t) \sim \frac{e^{p_1 t}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\eta t} \left[F_l(p_1 + \eta e^{-i\pi}) - F_u(p_1 + \eta e^{\pi})\right] d\eta \tag{2.6.18}$$

在 $\eta = 0$ 附近, 即 $p = p_1$ 附近, 由式 (2.6.14)

$$\frac{1}{2i}\left[F_l(p_1 + \eta e^{-i\pi}) - F_u(p_1 + \eta e^{i\pi})\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta^{k-\nu} \sin[(\nu - k)\pi] \tag{2.6.19}$$

代入 (2.6.18), 由 Watson 引理, 可逐项积分

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{p_1 t}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin[(\nu - k)\pi]\, \Gamma(1 + k - \nu) t^{\nu-k-1} \\ &= t^{\nu-1} e^{p_1 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\nu - k)} t^{-k} \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

这就是 $t \to \infty$ 时 $f(t)$ 的渐近展开式. 实部比 p_1 小的奇点的贡献为超越小的, 可以略去.

习　　题

2.1　试求 $\varepsilon \to 0$ 时积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \varepsilon t}{t} dt$$

2.2　试求

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^n} dt$$

的渐近展开式，并证明余项确比保留的项要小.

2.3 证明

(a) $$\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{1}{\sqrt{x}}(f \cos x - g \sin x)$$

(b) $$\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{1}{\sqrt{x}}(f \sin x + g \cos x)$$

其中
$$f \sim \frac{1}{2x} - \frac{5!!}{(2x)^3} + \frac{9!!}{(2x)^5} + \cdots$$
$$g \sim 1 - \frac{3!!}{(2x)^2} + \frac{7!!}{(2x)^4} - \cdots$$

2.4 证明

(a) $$\int_0^1 e^{-xt} \ln(2+t) dt \sim \frac{\ln 2}{x}$$

(b) $$\int_0^1 e^{-xt} \ln(1+t) dt \sim \frac{1}{x^2}$$

(c) $$\int_0^1 e^{-xt} \sin t dt \sim \frac{1}{x^2}$$

(d) $$\int_0^1 e^{-(x/t)+t+xt} dt \sim \frac{e}{2x}$$

2.5 试求
$$I(x) = \int_1^2 \exp\left[-x(t+\frac{1}{t})\right] dt$$
之渐近表示.

2.6 求积分
$$I = \int_0^{\infty} e^{-\omega x^2} x^{5/2} \ln(1+x) dx$$
完全的渐近展开 ($\omega \to +\infty$).

2.7 求下述积分的渐近表示:
$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{ix(\frac{t^3}{3}+t)} dt, \qquad x \to \infty$$

2.8 证明

(a) $I(x)=\int_0^1 e^{ixt^3}dt \sim \dfrac{\Gamma(\frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{6}})}{3x^{1/3}}$

(b) $I(x)=\int_0^1 \dfrac{e^{ixt^3}dt}{\sqrt{t}} \sim \dfrac{\Gamma(\frac{1}{6})e^{i\pi/12}}{3x^{1/6}}$

(c) $I(x)=\int_0^1 e^{ixt^3}\ln(1+t) \sim \dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})e^{\frac{\pi i}{3}}}{3x^{2/3}}$

2.9 求 $u\to\infty$ 时，$J_\nu(\nu)$ 的渐近表示

$$J_\nu(\nu)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left[\nu(\sin t - t)\right]dt-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu(sht+t)}dt$$

2.10 求下述积分与渐近展开：

$$I=\int_0^1 e^{ixt^2}dt$$

(a) 用驻相法求其首项；

(b) 在复平面 t 上证明 $u=v$，$u^2-v^2=1$ 是最陡下降路径；

(c) 在上述两条线上积分，得到完全的渐近展开式.

第三章 波动问题与渐近积分

为了了解积分的渐近展开理论在物理问题中的应用，我们选择同它有密切关系的波动问题来进行研究．首先简单叙述波动的一般概念，然后以渐近分析为手段来阐明群速度的物理意义，最后再举几个具体的波动问题的例子．

3.1 波动概论

所谓“波动”是指随时间演化和空间传播的一切振荡现象．这里特别要指出的是：波的传播并不意味着介质本身也在传播．

波动是自然界与人类生活中经常发生的一种普遍现象．水的表面波是早已为人们熟悉的一个例子；其次是声音；1690 年，Huygens 提出了一个光学原理，他的出发点就是认为光是一种波动；Maxwell 的电磁波理论是 19 世纪最重大发现之一；到上世纪末；人们还知道了固体介质中的弹性波；20 世纪以来，由于物理学中量子力学和相对论所引起的革命，人们又引进了物质波、引力波的概念．此外，最近 20 年来，林家翘又提出了星系密度波理论．可见，波动现象真是无所不包，无处不在的．

为了叙述的方便起见，我们还是先复述一下波动理论中的一些基本概念．

1. 频率 f 是指单位时间内振荡的次数；圆频率 ω 指单位时间内的相移．显然

$$\omega = 2\pi f \tag{3.1.1}$$

2. 周期 T 是指振荡一次所需要的时间

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.1.2}$$

3. 波长 λ 指振荡一次在空间传播的距离或相同振动状态两点间的距离；

4. 波数 k 指波沿空间某一方向传播单位距离所引起的相位移，它是与单位距离上波峰 (谷) 的数目成正比的，显然

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.1.3}$$

如果考虑到传播方向，它可以用矢量表示

$$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{k}_0 \tag{3.1.4}$$

$\boldsymbol{k}_0$ 是沿着波传播方向的单位矢量， $\boldsymbol{k}$ 叫波矢量.

5. 波速 c 指单位时间内波传播的距离，我们不难导出

$$\lambda = cT \tag{3.1.5}$$

由于速度也有方向性，故可用矢量表示

$$\boldsymbol{c} = c\boldsymbol{k}_0 \tag{3.1.6}$$

这里的波速指的是同相位的点在空间传播的速度,所以叫 相速(phase velocity).

为了更清楚地说明这一概念，我们来讨论平面波

$$\phi = ae^{i\theta} \tag{3.1.7}$$

式中 a 为振幅， θ 为 相函数 (phase function), 可表达为

$$\theta = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \tag{3.1.8}$$

$\boldsymbol{k}$ 为波矢量， $\boldsymbol{r}$ 是位置矢量， ω 为圆频率.

波阵面(wave front) 是指由空间同相位的点构成的二维流形，即

$$\theta = \text{const.} \tag{3.1.9}$$

若 $\underset{\sim}{k}$ 为常矢量时，波阵面显然是平面，所以叫平面波.

若在时刻 t 至 $t+\Delta t$ 间，原波阵面从 $\boldsymbol{r}$ 移动到 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 的位置，那么

$$\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}-\omega\Delta t=0 \tag{3.1.10}$$

所以

$$c=\left|\frac{dr}{dt}\right|=\frac{\omega}{k} \tag{3.1.11}$$

这里， k 为波数;

$$\boldsymbol{c}=\frac{\omega}{k}\boldsymbol{k}_0 \tag{3.1.12}$$

$\boldsymbol{k}_0$ 刚好是波阵面的法线方向.

从 (3.1.12) 可以看出，在 $(\omega/k)\neq \text{const}$ 时，相速度是与频率或波长有关的，这种现象叫 色散(dispersion). 这是因为波速依赖于频率. 在折射时，因折射指数不同而发生色散现象，雨后的彩虹就是这样形成的；单峰的波形包含着不同的频率成分，由于它们各自的波速不同会发生畸变，这是除非线性效应，耗散效应以外，使波形发生畸变的另一原因. 这样一来，我们可以将波分成两类：一类叫非色散波， $\omega=ck$; 另一类叫色散波， $\omega\neq ck$. 这里，频率与波数的依赖关系叫色散关系，它可表达为

$$\omega=\omega(\boldsymbol{k}) \tag{3.1.13}$$

或以隐形函数形式表示：

$$G(\omega,\ \boldsymbol{k})=0 \tag{3.1.14}$$

有时也可表达为相速度与频率的关系

$$c=c(\omega) \tag{3.1.15}$$

将平面波形式的 (3.1.7), (3.1.8) 代入下列发展方程：

波动方程

$$\phi_{tt}-c^2\nabla^2\phi=0$$

Klein–Gordon 方程

$$\phi_{tt} - \alpha^2\nabla^2\phi + \beta^2\phi = 0$$

线性 Boussinesq 方程

$$\phi_{tt} - \alpha^2\nabla^2\phi - \beta^2\nabla^2\phi_{tt} = 0$$

线性 Korteweg–deVries 方程

$$\phi_t + \alpha\phi_x + \beta\phi_{xxx} = 0$$

线性 Burgers 方程

$$\phi_t + \alpha\phi_x - \nu\phi_{xx} = 0$$

Schrödinger 方程

$$ih\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\nabla^2\phi = 0$$

我们可以分别得到如下色散关系:

$$\begin{aligned}
&\omega = \pm ok \\
&\omega = \pm\sqrt{\alpha^2k^2 + \beta^2} \\
&\omega = \pm\frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2k^2}} \\
&\omega = \alpha k - \beta k^2 \\
&\omega = \alpha k - i\nu k^2 \\
&\omega = \frac{hk^2}{2m}
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

所以，除了第一式为非色散波，第五式为耗散波外，均为色散波，一般说来，对于以多项式算子表达偏微分方程

$$P(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})\phi = 0 \tag{3.1.17}$$

那么，它对应于平面波 (3.1.7), (3.1.8) 的色散关系应为

$$P(-i\varepsilon\omega,\ \ ik_1,\ \ ik_2\ \ ik_3)=0 \tag{3.1.18}$$

这种色散关系必然是多项式．那么，究竟什么样的方程会对应非多项式型的色散关系呢？为此，我们来考察如下的积分微分方程：

$$\frac{\partial\varphi}{dt}+\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi=0 \tag{3.1.19}$$

将平面波解 (3.1.7)(3.1.8) 代入，可得

$$c=\frac{\omega}{k}=\int_{-\infty}^{\infty}K(\zeta)e^{-ik\zeta}d\zeta$$

所以， K 的函数形式应恰好是 $c=c(k)$ 的 Fourier 逆变换即

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{ikx}dk \tag{3.1.20}$$

譬如，我们已知多项式的色散关系

$$C(k)=C_0+C_2k^2+\cdots+C_{2m}k^{2m} \tag{3.1.21}$$

由 (3.1.20) 得

$$K(x)=C_0\delta(x)-C_2\delta''(x)+\cdots+(-1)^mC_{2m}\delta^{(2m)}(x) \tag{3.1.22}$$

从 (3.1.19) 出发，可导出相应于色散关系 (3.1.21) 的微分方程为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+C_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial x}+\cdots+(-1)^mC_{2m}\frac{\partial^{2m+1}\phi}{\partial x^{2m+1}}=0 \tag{3.1.23}$$

除 (3.1.19) 式之外，对于表面波，仅沿某方向有波动现象，另一方向无波动现象的也会得到非多项式的色散关系．

对于非线性方程，情况要更复杂些．我们显然可以看到，色散关系，因而波速也要依赖于振幅 a．

现在再来讨论移动介质中的波的色散关系，由于波的相速是相对于波源来说的，对于运动的波源或介质，我们计及波源本身或介质本身的移动速度后，色散关系应改成

$$\omega = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{k} + \omega_0 \tag{3.1.24}$$

式中， $\boldsymbol{U}$ 是介质或波源移动速度， ω_0 为固有频率， ω 为表观频率. 也就是说，波的表观频率与介质或波源运动速度和方向有关，这叫 Töppler 现象. 譬如：火车开近时的汽笛尖叫声或远离时声音又变低沉就是这个原因. 当波源移动得比波速快时会产生 Mach 锥及声爆 (sonic boom) 现象. 若波源移动刚好等于相速，这时在该运动坐标系中， $\omega = 0$, 也就是说，我们看到的只是“定常”的波谱.

3.2 群速度与渐近分析

现在，我们要比较详细地来讨论波动问题中的一个重要概念 —— 群速度 (group velocity). 为了直观起见，我们先来考虑两个波数，频率相近的谐波的叠加.

$$\phi_1 = a\sin[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]$$

$$\phi_2 = a\sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

那么，叠加后的结果为

$$\phi = 2a\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)\sin(kx - \omega t) \tag{3.2.1}$$

叠加后，波形的调制如图 3.2.1 所示.

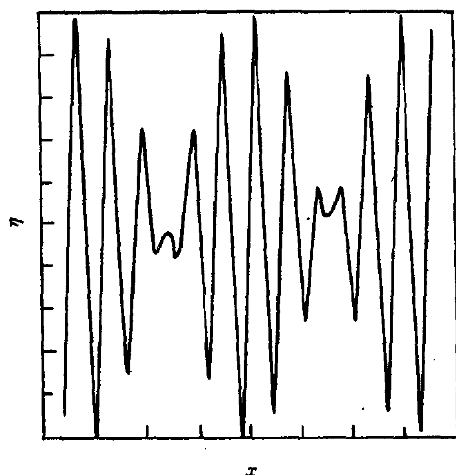


图 3.2.1　两个邻近等幅谐波的叠加 — 波的调制

我们看到，虽然叠加后的波其波数与频率仍与原先相近，但振幅以缓慢的频率在改变着，或发生调制 (modulation) 形成了波包 (wave packet)，我们称波包的传播速度

$$C_g = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \tag{3.2.2}$$

为群速度．在振动问题中也有类似现象，两个频率相近的音叉同时振动会产生拍．

上面只分析了含有两个谐波时所产生的群速度，现在要推广到含有许多谐波成分时的情况．对于含多种频率成分的线性波，我们可将解表达成积分形式

$$\phi = \int_0^\infty F(k)\exp\left[i(kx - \omega(k)t)\right]dk \tag{3.2.3}$$

其中

$$\omega = \omega(k)$$

为色散关系, $F(k)$ 由初条件确定

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ikx}\varphi(x,0)dx \tag{3.2.4}$$

令

$$\psi(k)=k\frac{x}{t}-\omega(k)$$

解 (3.2.3) 可写成

$$\varphi=\int_0^\infty F(k)\exp\left[i\psi(k)t\right]dk \tag{3.2.5}$$

若 (x/t) =const, 求 $t\to\infty$ 时 φ 的表达式, 相当于求远场解. 这显然可用驻相法来计算, 即求

$$\psi'(k)=\frac{x}{t}-\omega'(k)=0 \tag{3.2.6}$$

之处为驻相点, 若在该处 $k=k_g$, 那么

$$\varphi(x,t)\sim F(k_g)\exp\left[i\left\{k_gx-\omega(k_g)t-\frac{\pi}{4}\text{sgn}\omega''(k_g)\right\}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{t\left|\omega''(k_g)\right|}} \tag{3.2.7}$$

因此, 波幅 a 的渐近行为是

$$a\propto\frac{F(k_g)}{\sqrt{t\left|\omega''(k_g)\right|}} \tag{3.2.8}$$

即以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 幂衰减. 对于 k_g =const 之等波数面, 它是以群速度 c_g 传播的

$$c_g=\frac{x}{t}=\omega'(k_g) \tag{3.2.9}$$

我们还可以从能量观点来解释群速度. 由于能量密度与振幅平方成正比, 所以介于 $x_1(k_1)$, $x_2(k_2)$ 之间物理空间的总能量为

$$E\propto\int_{x_1}^{x_2}aa^*dx\sim\int_{x_1}^{x_2}\frac{F(k)F^*(k)}{t\left|\omega''(k)\right|}dx \tag{3.2.10}$$

因为 x_i 是等波数面，所以

$$x_i = \omega'(k_i)t \tag{3.2.11}$$

在 k_1, k_2 间 $\omega''(k) \neq 0$ 的假定下，不妨设 $\omega''(k_i) > o$, 将上述积分变换到波数空间中去：

$$E \propto \int_{k_1}^{k_2} F(k)F^*(k)dk = \text{const} \tag{3.2.12}$$

由此可见，介于两等波数面间的能量保持不变．所以，从这个意义上讲，群速度也是能量传播的速度．由于随着 t 的增长，波的范围以正比于 t 的速度扩展，所以，能量密度反比于 t, 而振幅 a 则反比于 $t^{\frac{1}{2}}$.

下面，我们再从动力学观点来研究波列的传播．假定

$$\varphi = a(x,\ t)e^{i[xk(x,\ t)-t\omega(x,\ t)]} \tag{3.2.13}$$

也就是说, 这时不仅振幅随时间地点缓慢变化, 而且也不是平面波, $k(x,t)$, $\omega(x,t)$ 也是时间、地点的缓变函数．我们依然有色散关系

$$\omega = \omega(k)$$

因此

$$\theta = kx - \omega(k)t$$

于是

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = k + \left[x - \omega'(k)t\right]\frac{\partial k}{\partial x}$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\omega(k) + \left[x - \omega'(k)t\right]\frac{\partial k}{\partial t}$$

在缓变的假定下

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = k(x,\ t) \tag{3.2.14}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\omega(x,\ t) \tag{3.2.15}$$

这与单色平面波有相同的结果. 从 (3.2.14), (3.2.15) 式得

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0 \tag{3.2.16}$$

其物理意义就是波数守恒定律. 利用色散关系，上式进一步化成

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\omega'(k)\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{\partial k}{\partial t}+c_g\frac{\partial k}{\partial x}=o \tag{3.2.17}$$

上述表达式说明, 波数是以群速度传播的. 如果 $t=0$ 时, $k=f(x)$, 那么方程 (3.2.17) 的通解为

$$\begin{aligned} k &= f(\xi) \\ x &= \xi + c_g(f(\xi))t \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

这就是 $k=k(x,\ t)$ 的隐式解，这是因为沿特征线

$$\frac{dx}{dt}=c_g \tag{3.2.19}$$

$$k=\text{const} \tag{3.2.20}$$

的缘故. 对于三维的情况，可参看 Witham(1974) 的书.

由于扰动面是以最大群速度传播的，我们常常称它为先导波，在那里

$$\omega''(k_c)=0 \tag{3.2.21}$$

这时，驻相法公式 (3.2.7) 就不适用了. 因为

$$\omega(k)=\omega(k_c)+\omega'(k_c)(k-k_c)+\frac{1}{3!}\omega'''(k_c)(k-k_c)^3+\cdots$$

所以

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \exp i\left[k_c x - \omega(k_c)t\right]\int_0^{\infty} F(k)\exp i\left\{(x-c_g t)(k-k_c)\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{6}\omega'''(k_c)t(k-k_c)^3\right\} dk \\
&= \exp i\left[k_c x - \omega(k_c)t\right]\int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{k}+k_c)\exp i\left\{(x-c_g t)\tilde{k}\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{6}\omega'''(k_c)t\tilde{k}^3\right\} dk
\end{aligned} \tag{3.2.22}
$$

因为，Airy 函数有积分表示

$$
Ai(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(sz+\frac{1}{3}s^3)\right\} ds \tag{3.2.23}
$$

可见

$$
\begin{aligned}
\varphi &\sim 2\pi F(k_c)\exp i\left[k_c x\right. \\
&\quad \left. -\omega(k_c)t\right]\left[\frac{-2}{t\omega'''(k_c)}\right]^{\frac{1}{3}} Ai\left[\frac{-2^{\frac{1}{3}}(x-c_g t)}{(t\omega'''(k_c))^{\frac{1}{3}}}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.24}
$$

由 Airy 函数的渐近表示

$$
Ai(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\dfrac{2}{3}z^{\frac{2}{3}}) & z\to+\infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,|z|^{\frac{1}{4}}}\sin(\dfrac{2}{3}\,|z|^{3/2}+\dfrac{\pi}{4}) & z\to-\infty \end{cases}
$$

所以在先导波前是衰减型的，在先导波后是振荡型的，波幅以 $t^{-\frac{1}{3}}$ 衰减，因此，它衰减得比波的其它组成部分缓慢.

3.3 水波

前面讲的是关于色散波的一般理论，我们常见的水波就是一种色散波．以有限深度的一维水波来说，它的速度势 φ 满足 Laplace 方程，即

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3.3.1}$$

以及运动学、动力学边界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,, \qquad z=\zeta \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}\nabla^2\varphi = -\frac{p}{\rho}\,, \qquad z=\zeta \tag{3.3.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,, \qquad z=-\infty \tag{3.3.4}$$

其中 $\zeta = \zeta(x,\ t)$ 是自由面的方程．这是典型的非线性边界条件，除了有非线性项外，还有待定的自由面．如果波幅很小，可以线性化，得到边界条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,, \qquad z=0 \tag{3.3.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta = -\frac{p}{\rho}\,, \qquad z=0 \tag{3.3.6}$$

我们可取解的形式为

$$\zeta = a\ e^{i(kx-\omega t)} \tag{3.3.7}$$

$$\varphi = b\ e^{kz+i(kx-\omega t)} \tag{3.3.8}$$

它满足方程 (3.3.1) 及边界条件 (3.3.4), 代入边界条件 (3.3.5), (3.3.6), 可得

$$i\omega a + kb = 0$$

$$(\rho g + Tk^2)a - i\omega\rho b = 0$$

这里，我们已考虑了表面张力在内的压力平衡．所以

$$p = -T\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \tag{3.3.9}$$

为了得到非零解，必有

$$\begin{vmatrix} i\omega & , & k \\ \rho g + Tk^2 & , & -i\omega\rho \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\omega^2 = k(g + \frac{Tk^2}{\rho}) \tag{3.3.10}$$

这就是无限深度时水波的色散关系，叫重力毛细波．

$$\text{(i) 当 } \frac{\rho g}{T} \gg k^2 \text{ 时，} \quad \omega^2 = kg\text{，} \quad \text{重力波} \tag{3.3.11}$$

$$\text{(ii) 当 } \frac{\rho g}{T} \ll k^2 \text{ 时，} \quad \omega^2 = \frac{Tk}{\rho}\text{，} \quad \text{毛细波} \tag{3.3.12}$$

对重力毛细波浪，相速与群速分别为

$$c = (\frac{g}{k} + \frac{T}{\rho}k)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.13}$$

$$c_g = \frac{1}{2}c\frac{1 + \frac{3T}{\rho g}k^2}{1 + \frac{T}{\rho g}k} \tag{3.3.14}$$

所以对重力波

$$c_g = \frac{1}{2}c < c \tag{3.3.15}$$

对于毛细波

$$c_g = \frac{3}{2}c > c \tag{3.3.16}$$

我们知道

$$\omega = ck$$

所以

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}$$

在 $\frac{dc}{dk} > 0$ 或 $\frac{dc}{d\lambda} < 0$ 时，$c_g > c$; $\frac{dc}{dk} < 0$ 或 $\frac{dc}{d\lambda} > 0$ 时，$c_g < c$ 前者叫反常色散 (如毛细波); 后者叫正常色散 (如重力波). 重力毛细波的相速有一极小值，发生在

$$k_m = (\frac{\rho g}{T})^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.17}$$

处，这时有

$$c_m^2 = 2(\frac{Tg}{\rho})^{1/2} \tag{3.3.18}$$

对于水波而言，$T = 0.074\text{N/m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $c_m = 23.2\text{cm/s}$, $\lambda_m = 1.73\text{cm}$, $k_m = 363.91/\text{m}$. 所以只有当波长很短时，才需要考虑毛细波效应.

现在，我们要研究流体沿着 x_1 方向以速度 U 流动时波的传播情况. 我们将问题归结成对新的速度势 Φ 的方程，它与原速度势的关系为

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ z,\ t) = Ux_1 - \frac{1}{2}U^2t + \Phi(x_1,\ x_2,\ z,\ t) \tag{3.3.19}$$

显然，$\Phi(x_1,\ x_2,\ z,\ t)$ 依然满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{3.3.20}$$

以及线性化边界条件

$$\Phi_z = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + U\zeta_{x_1} \qquad 在\ \ z=0 \tag{3.3.21}$$

$$\Phi_t + g\zeta + U\Phi_{x_1} = -f(x)e^{\varepsilon t} + \frac{T}{\rho}\zeta_{x_ix_i} \qquad 在\ \ z=0 \tag{3.3.22}$$

$$\Phi \to 0 \qquad z = -\infty \tag{3.3.23}$$

所以，引入 U_{x_i} 是为了消除沿 x_1 方向的均匀速度，引入 $-\frac{1}{2}U^2t$ 是为了使边界条件 (3.3.22) 简化，引进 $e^{\varepsilon t}$ 的因子说明 $t \to -\infty$ 时不

存在外界压力场，$\zeta_{x_ix_i}$ 代表了按相同下标相加的哑指标．我们假定解的形式为

$$\Phi(\boldsymbol{x},\ z,\ t)=e^{\varepsilon t}\int_{-\infty}^{\infty}B(k)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+|\boldsymbol{k}|z}d\boldsymbol{k} \tag{3.3.24}$$

$$\zeta(\boldsymbol{x},\ t)=e^{\varepsilon t}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+|\boldsymbol{k}|z}d\boldsymbol{k} \tag{3.3.25}$$

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k}$ 指 x_1, x_2 平面内的矢量，波矢量．(3.3.24), (3.3.25) 式满足方程 (3.3.20) 及边界条件 (3.3.23), 将它们代入运动学、动力学条件得

$$(\varepsilon+iUk_1)A-|\boldsymbol{k}|\,B=0$$

$$(g+\frac{T}{\rho}\,|\boldsymbol{k}|^2)A+(\varepsilon+iUk_1)B=-F(k)$$

式中，$F(k)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的 Fourier 变换

$$F(k)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \tag{3.3.26}$$

求出上述方程之解

$$\zeta=e^{\varepsilon t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\boldsymbol{k}|\,F(k)}{(k_1U-i\varepsilon)^2-\omega_0^2}d\boldsymbol{k} \tag{3.3.27}$$

其中

$$\omega_0^2=(g+\frac{T}{\rho}\,|\boldsymbol{k}|^2)\,|\boldsymbol{k}| \tag{3.3.28}$$

是重力毛细波的色散关系．现在分两种情况讨论．

1．一维重力波，且假定 $f(x_1)=p\delta(x_1)$, 这时 $F(k_1)=\dfrac{1}{2\pi}p$

$$\frac{\zeta}{p}=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_1e^{ik_1x_1}}{(k_1U-i\varepsilon)^2-\omega_0^2(k_1)}dk$$

$$
= \lim_{\varepsilon \to o} \frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{k_1 e^{ik_2 x}}{(k_1 U - i\varepsilon)^2 - \omega_0^2(k_1)} + \int_0^\infty \frac{k_1 e^{-ik_1 x} dk_1}{(k_1 U + i\varepsilon)^2 - \omega_0^2(k_1)} \right] \tag{3.3.29}
$$

$$
\approx \lim_{\varepsilon \to o} \frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{e^{ik_1 x} dk_1}{k_1 U^2 - 2i\varepsilon U - g} + \int_0^\infty \frac{e^{-ik_1 x} dk_1}{k_1 U^2 + 2i\varepsilon U - g} \right]
$$

因此

$$
\frac{\zeta U^2}{p} \approx \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{e^{ik_1 x} dk_1}{k_1 - (\frac{g}{U^2} + \frac{2i\varepsilon}{U})} + \int_0^\infty \frac{e^{-ik_1 x} dk_1}{k_1 - (\frac{g}{U^2} - \frac{2i\varepsilon}{U})} \right] \tag{3.3.30}
$$

为了计算高阶近似，应改变围道，取最陡下降方向，并考虑两种情况：

(i) $x_1 > 0$, 改变路径后还要计及因奇点存在的留数．所以

$$
\frac{\zeta U^2}{p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{ie^{\varepsilon t}}{2\pi} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-mx_1} dm}{im - (\frac{g}{U^2} + \frac{2i\varepsilon}{U})} + \int_0^\infty \frac{ie^{-mx_1} dm}{im + (\frac{g}{U^2} - \frac{2i\varepsilon}{U})} \right] \right.
$$

$$+e^{\varepsilon t}i\left[e^{ix_1\left(\frac{g}{U^2}+\frac{2i\varepsilon}{U}\right)}-e^{-ix_1\left(\frac{g}{U^2}-\frac{2i\varepsilon}{U}\right)}\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{me^{-mx_1}dm}{m^2+\frac{g^2}{U^4}}-2\sin\frac{g}{U^2}x_1 \tag{3.3.31}$$

(ii) $x_1<0$, 不必计及留数，因为围道内无奇点. 所以

$$\frac{\zeta U^2}{p}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{me^{-mx_1}dm}{m^2+\frac{g^2}{U^4}} \tag{3.3.32}$$

还是用渐近方法来估计下述积分:

$$\int_0^\infty\frac{me^{-m|x_1|}dm}{m^2+k^2}=\int_0^\infty e^{-m|x_1|}\frac{m}{k^2}\left[1-\frac{m^2}{k^2}+\frac{m^4}{k^4}-\cdots\right]dm$$

$$\frac{1}{k^2x_1^2}-\frac{3!}{k^4x_1^4}+\frac{5!}{k^6x_1^6}-\cdots \tag{3.3.33}$$

这是因为要有定常解， $U=c=\sqrt{\frac{g}{k}}$, 所以式中之 k 为对应之重力波波数 k_g. 所以离开原点为一个波长时， $k\lambda=2\pi$, 上述积分值就很小了，可忽略不计. 这时

$$\frac{\zeta U^2}{p}\sim\begin{cases}0 & x<0\\ -2\sin\ k_gx & x>0\end{cases} \tag{3.3.34}$$

即重力波出现在扰动源的后面.

2. 一微重力毛细波. 同样可解出

$$\frac{\zeta T}{\rho P}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{e^{\varepsilon t}}{2\pi}\left[\int_0^\infty\frac{e^{ikx_1}dk}{k^2-\frac{U^2\rho}{T}k+\frac{\rho g}{T}+\frac{2i\varepsilon U\rho}{T}}\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{e^{-ikx_1}dk}{k^2-\frac{U^2\rho}{T}k+\frac{\rho g}{T}-\frac{2i\varepsilon U\rho}{T}}\right. \tag{3.3.35}$$

奇点在

$$k^2 - \frac{\rho U^2}{T}k + \frac{\rho g}{T} = 0 \tag{3.3.36}$$

根的附近，在

$$U^2 \geq 2\sqrt{\frac{gT}{\rho}} = c_m^2 \tag{3.3.37}$$

时有实根 (否则只有虚根)

$$k = \frac{\rho}{2T}(U^2 \pm \sqrt{U^4 - c_m^4}) \tag{3.3.38}$$

大的根叫 k_T, 小的叫 k_g, 即 $k_T > k_g$. 那么 (3.3.35) 第一积分之分母有两个根

$$k_1 = k_T - \frac{2iU\rho}{T(k_T - k_g)}\varepsilon \tag{3.3.39}$$

$$k_2 = k_g + \frac{2iU\rho}{T(k_T - k_g)}\varepsilon \tag{3.3.40}$$

同样地，第二积分之分母也有两个根为

$$k_1 = k_T + \frac{2iU\rho}{T(k_T - k_g)}\varepsilon \tag{3.3.41}$$

$$k_2 = k_g - \frac{2iU\rho}{T(k_T - k_g)}\varepsilon \tag{3.3.42}$$

这时，不管 $x_1 > 0$ 还是 $x_1 < 0$, 不管所取积分路径如何，第一、二积分的围道内总有奇点存在，所以都有波动项出现.

$$\zeta/p = \begin{cases} -2\dfrac{\rho}{(k_T - k_g)T}\sin k_T x_1, & x_1 < 0 \quad (3.3.43) \\ -2\dfrac{\rho}{(k_T - k_g)T}\sin k_g x_1, & x_1 > 0 \quad (3.3.44) \end{cases}$$

也就是说，在重力毛细波前后都有波存在. 我们可按 (3.3.43), (3.3.44) 式知道重力毛细波的波谱. 从物理上讲，毛细波群速大于相速，重力波群速小于相速，所以这是完全可以理解的. 若要产生定常运动，

U 必须等于重力毛细波之相速，且大于 c_m，(3.3.38) 式才能有两个实根. 否则，只有毛细波产生.

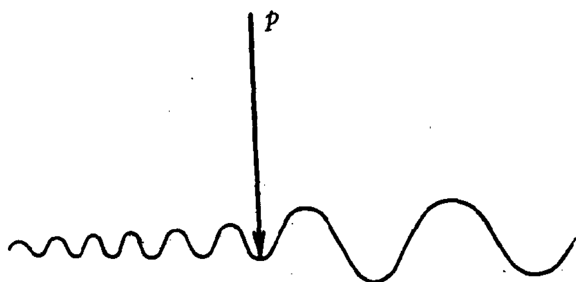


图 3.3.1　重力毛细波谱

习　　题

3.1　求证有限水深二维重力波的色散关系为 $\omega^2 = gk\tanh kh$ 如果考虑表面张力，导出类似的表达式，并计算其相速度，群速度.

3.2　有二种液体，轻液体置于重液体之上，由外界扰动可以产生界面波，在无界，有界情况下，请导出色散关系，并计算其相速度与群速度.

3.3　在上下两层液体同时还有速度 U_1、U_2 时，研究其界面波的特性，除了有相速度群速度外，还可研究各种因素引起的不稳定性.

3.4　已知其物理量 $\varphi(x,\ t)$ 由不同成分的谐波叠加而成，若已知 $\varphi(x,\ 0) = e^{-ax^2}$，$a > 0$，$\omega = k^2$，试求 $\varphi(x,\ t)$ 的表达式及其渐近行为.

3.5　试用 Fourier–Laplace 变换求解二维水波的瞬变问题

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

在自由面上，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad z=0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+g\zeta=-\frac{p_a}{\rho}, \qquad z=0$$

在底部

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad z=-h$$

讨论由自由面初位移或底部速度，即 (1) $\zeta(x,0)=\zeta_0(x)$，(2) $\frac{\partial H}{\partial t}|_{t=0}=H_0'(x)$ 所引起的扰动，并分析其渐近行为.

第四章 微分方程的渐近解

在本章，我们要用渐近方法来研究微分方程的渐近解，讨论该方程在某局部区域的渐近行为，这是渐近分析的另一重要内容. 我们首先对微分方程的奇点进行分类，然后在各类奇点邻域内求级数解或渐近解，着重讲述非正则奇点邻域内的渐近解. 我们还从微分方程渐近解的角度进一步探讨 Stokes 现象. 最后，我们将讨论方程组和差分方程的渐近解.

4.1 微分方程的奇点

为方便起见，我们首先讨论一阶常微分方程的简单情况

$$y'(x) = F(x)y(x) \tag{4.1.1}$$

它的通解为

$$y = Ce^{\int F(\tau)d\tau} \tag{4.1.2}$$

若 $F(x)$ 在 x_0 的邻域 $|x - x_0| < R$ 内是解析的 (这里，我们把 x 看作复变量). 由于

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x - x_0)^n \tag{4.1.3}$$

解 (4.1.2) 可写成

$$y = C\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1}\right) \tag{4.1.4}$$

它亦是 x_0 的邻域 $|x - x_0| < R$ 内的解析函数，这时，我们称 x_0 为微分方程 (4.1.1) 的正常点 (ordinary point).

若 x_0 为函数 $F(x)$ 的一阶极点，即 $F(x)$ 在 x_0 点附近可表达为：

$$F(x) = \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} F_n (x - x_0)^n \tag{4.1.5}$$

这时，方程的解为

$$y = c(x - x_0)^{F_0} \exp[F_1(x - x_0) + \frac{F_2}{2}(x - x_0)^2 + \cdots] \tag{4.1.6}$$

除了 F_0 为正整数外，x_0 点是方程 (4.1.1) 解的极点或支点，这时，我们称 x_0 为微分方程 (4.1.1) 的正则奇点 (regular singular point). 请注意，在正则奇点邻域内依然可以有解析解，譬如 F_0 为正整数的情形.

若 x_0 为函数 $F(x)$ 的二阶或二阶以上极点，即 $F(x)$ 在 x_0 点附近可表达成

$$F(x) = \frac{1}{(x - x_0)^N} \sum_{n=0}^{\infty} F_n (x - x_0)^n, \quad N \geq 2 \tag{4.1.7}$$

故方程 (4.1.1) 的解为

$$F = c(x - x_0)^{F_{N-1}} \exp[\frac{-F_0}{(N-1)(x - x_0)^{N-1}} - \frac{F_1}{(N-2)(x - x_0)^{N-2}} - \cdots - \frac{F_{N-2}}{(x - x_0)}] \cdot \exp[F_N(x - x_0) + \frac{F_{N+1}}{2}(x - x_0)^2 + \cdots] \tag{4.1.8}$$

显然，x_0 是方程的解的本性奇点. 这时，我们称 x_0 为微分方程 (4.1.1) 的非正则奇点 (irregular singular point).

归纳起来，我们可以从微分方程系数的性质，确定奇点分类，并推断解的性质.

表 4.1.1　一阶微分方程奇点分类

系数性质	奇点类别	解 $y(x)$ 的性质
解　析	正常点	解 $y(x)$ 解析
一阶极点	正则奇点	解 $y(x)$ 解析或有极点、支点
二阶以上极点	非正则奇点	解 $y(x)$ 有本性奇点

我们再来讨论二阶常微分方程

$$y' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4.1.9}$$

的奇点类型.

若方程 (4.1.9) 的系数 $p(x), q(x)$ 在 $|x - x_0| < R$ 内解析. 我们称 x_0 为方程 (4.1.9) 的正常点. 它的解至少在该邻域内解析.

若方程 (4.1.9) 的系数 $p(x), q(x)$, 满足 $p(x)(x - x_0), q(x)(x - x_0)^2$, 在 $|x - x_0| < R$ 内解析, 我们称 x_0 为方程 (4.1.9) 的正则奇点, 那么在该邻域内它的两个线性无关解的形式为:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \\ y_2(x) &= (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

或

$$y_1(x) = g y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \tag{4.1.11}$$

我们称 (4.1.10) 为 Frobenius 型级数解, 称 (4.1.10),(4.1.11) 为正则解. 请注意, 当 ρ_1, ρ_2 为零或正整数时, 正则解是解析函数, 所以, 正则解包括了解析解的情况, 否则就是极点或支点;

若方程 (4.1.9) 的系数 $p(x), q(x)$ 中至少有一个不满足 $(x - x_0)p(x), (x - x_0)^2 q(x)$ 在 x_0 解析的条件, 我们称该点为方程 (4.1.9) 的非正则奇点. 在该点邻域内至少有一个解在 x_0 点有本性奇点.

同样地, 上述的奇点分类法可以推广到 n 阶常微分方程的情况:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + p_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + p_0(x) y = 0 \tag{4.1.12}$$

若方程 (4.1.12) 的系数 $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ 在 x_0 的邻域 $|x - x_0| < R$ 内解析, 我们称 x_0 为该方程的正常点, 它的解至少在该邻域内解析;

若方程 (4.1.12) 的系数 $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ 在 x_0 的邻域 $|x-x_0| < R$ 内满足 $p_0(x)(x-x_0)^n, p_1(x)(x-x_0)^{n-1}, \cdots, p_{n-1}(x)(x-x_0)$ 解析的条件，我们称 x_0 为方程 (4.1.12) 的正则奇点．它在 $|x-x_0| < R$ 内有 n 个线性无关的正则解．

$$y(x) = (x-x_0)^\gamma \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x-x_0)]^i Ai(x) \tag{4.1.13}$$

式中，Ai 是该邻域内的解析函数，注意，(4.1.13) 包括了 (4.1.10) (4.1.11) 的形式有支点、极点的情况在内，也包括了解析的情况．

若方程 (4.1.12) 的系数 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 在 x_0 的邻域 $|x-x_0| < R$ 内，至少有一个不满足 $p_0(x)(x-x_0)^n, p_1(x)(x-x_0)^{n-1}, \cdots, p_{n-1}(x-x_0)$ 解析的条件，我们称 x_0 为方程 (4.1.12) 的非正则奇点，它至少有一个解在点 x_0 有本性奇点．

从上面关于奇点分类的结论中，我们看到，奇点的类型主要由微分方程的系数在该点邻域内的性态唯一决定的，而不是由解的性态唯一决定的，但我们却有如下的逆定理 (Fuchs, 1866)．

若微分方程 (4.1.12) 的所有线性独立解在 x_0 的邻域 $|x-x_0| < R$ 内是正则解 (4.1.13)．那么 x_0 至多是该方程的正则奇点．

至于无穷远奇点的分类，这只要作变换

$$x = \frac{1}{t} \tag{4.1.14}$$

就可把无穷远点变换成原点，然后按通常的方法进行讨论，以一阶方程为例，在变换 (4.1.14) 下，原方程化成

$$\frac{dy}{dt} + F(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2} y = 0 \tag{4.1.15}$$

若

$$F(x) = \frac{1}{x^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{x^i} = t^n \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \tag{4.1.16}$$

因此

$$\widetilde{F}(t) = F(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2} = t^{n-2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \tag{4.1.17}$$

根据前面对一阶方程奇点分类的讨论，可得出如下结论：

$$F(x)=\frac{1}{x^2}(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots)\ ,\quad \infty\text{为正常点} \tag{4.1.18}$$

$$F(x)=\frac{1}{x}(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots)\ ,\quad \infty\text{为正则奇点} \tag{4.1.19}$$

$$F(x)\text{为其它情况}\ ,\qquad \infty\text{为非正则奇点} \tag{4.1.20}$$

同样地，我们可以讨论二阶常微分方程：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.1.21}$$

在 ∞ 处的奇点分类，结论如下：若在 ∞ 邻域内

$$p(x)=\frac{2}{x}+\frac{p_1}{x^2}+\cdots \tag{4.1.22}$$

$$q(x)=\frac{1}{x^4}(q_0+\frac{q_1}{x}+\cdots) \tag{4.1.23}$$

那么， ∞ 处为方程的正常点.

若在 ∞ 邻域内

$$p(x)=\frac{1}{x}(p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots) \tag{4.1.24}$$

$$q(x)=\frac{1}{x^2}(q_0+\frac{q_1}{x}+\cdots) \tag{4.1.25}$$

那么， ∞ 处为方程的正则奇点.

$p(x),q(x)$ 在其它情况下， ∞ 为方程的非正则奇点.

由于本章的重点是放在如何求微分方程的渐近解上，对于奇点分类的一些证明，我们不予赘述，有兴趣的读者可以参看有关书籍(王竹溪 1965)．但我们还要举一些例子来说明上述这些定理的应用，因为正确地分析奇点类型是求解微分方程的前提.

[**例 4.1.1**]　$(x-1)(2x-1)y''+2xy'-2y=0$. 该方程在 $x=1,x=\frac{1}{2}$ 是正则奇点，它有两个解为 $y_1=x,y_2=\frac{1}{x-1}$, 其中 y_1

在该两奇点附近解析， y_2 的收敛半径也超过系数的收敛半径.

[例 4.1.2]　$y''+\frac{1-x}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, 该方程在 $x=0$ 有正则奇点，它有两个解为 $y_1=\frac{1+x}{x}, y_2=\frac{e^x-x-1}{x}$, 其中 y_1 在 $x=0$ 有极点， y_2 在 $x=0$ 解析.

[例 4.1.3]　$x''-\frac{1+x}{x}y'+\frac{1}{x}y=0$, 该方程在 $x=0$ 有正则奇点，但它的两个解 $y_1=e^x, y_2=1+x$ 在那里均为解析函数.

[例 4.1.4]　$x^3y''+x(1-2x)y'-2y=0$, 该方程在 $x=0$ 附近有非正则奇点，其解 $y_1=x^2(1+2x), y_2=x^2e^{\frac{1}{x}}(1-2x)$, 其中 y_2 在 $x=0$ 附近有本性奇点，但 y_1 却是解析的.

[例 4.1.5]　$y'=x^{\frac{1}{2}}y$, 它的解为

$$y=ae^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}=a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})^n$$

注意，该幂级数不是以整数次幂递增的，所以它不是 Frobenius 型的级数.

[例 4.1.6]　$x'y''+(1+3x)y'+y=0$, 我们可形式地求幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!x^n$$

虽然它是以整数次幂递增的，但它也不是 Frobenius 型的级数，因为它是发散的.

上面这些例子，都给我们指出了，应用奇点分类定理时，千万不要单纯地从解的形式来判断奇点的类型.

[例 4.1.7]　Bessel 函数满足方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{4.1.26}$$

从方程可知， Bessel 函数在 $x=0$ 为正则奇点， $x=\infty$ 为非正则奇点.

[**例 4.1.8**]　超越几何函数满足方程

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \tag{4.1.27}$$

它在 $x=0,1,\infty$ 处有奇点，奇点的类型讨论如下：

$x=0, c\neq 0$ 为正则奇点，　$ab=0, c=0$ 为正常点.

$x=1$, 一般为正则奇点，　$ab=0, c=a+b+1$ 为正常点.

$x=\infty$, 一般是正则奇点；　$ab=0, a+b=1$ 为正常点.

4.2　正常点与正则奇点附近的级数解

我们首先要回顾一下微分方程教程中已经学过的知识，即求正常点附近的级数解，从 §4.1 的讨论，我们已知解的形式为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{4.2.1}$$

只须将 (4.2.1.) 代入微分方程，再确定系数 a_n 即可.

[**例 4.2.1**]　求方程

$$y'=2xy \tag{4.2.2}$$

在 $x=0$ 附近的级数解.

以式 (4.2.1) 代入 (4.2.2), 并让 x 的同幂系数相等，得递推方程

$$a_1=0, \quad a_n=\frac{2}{n}a_{n-2} \quad (n\geq 2) \tag{4.2.3}$$

所以，奇数项系数为零

$$a_{2n-1}=0 \tag{4.2.4}$$

偶数项系数可用 a_0 来表示

$$a_{2m}=\frac{1}{m!}a_0 \tag{4.2.5}$$

我们得到解的形式为

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{2m} = a_0 e^{x^2} \tag{4.2.6}$$

[**例 4.2.2**]　求 Airy 方程

$$y'' - xy = 0 \tag{4.2.7}$$

的级数解.

同样地，以式 (4.2.1) 代入 (4.2.7), 令同次幂系数相等，得递推公式

$$a_2 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3) \tag{4.2.8}$$

所以

$$a_{3m} = \frac{a_0}{3m(3m-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{9^m m!\Gamma(m+\frac{2}{3})} a_0 \tag{4.2.9}$$

$$a_{3m+1} = \frac{a_1}{(3m+1)3m\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{9^m m!\Gamma(m+\frac{4}{3})} a_1 \tag{4.2.10}$$

Airy 方程的级数解为

$$y(x) = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m}}{9^m m!\Gamma(m+\frac{2}{3})} + c_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m+1}}{9^m m!\Gamma(m+\frac{4}{3})} \tag{4.2.11}$$

适当选择 c_1, c_2 可以得到常用的 Airy 函数：$c_1 = 3^{-\frac{2}{3}}, c_2 = -3^{-\frac{4}{3}}$, $y(x) = Ai(x)$, 当 $c_1 = 3^{-\frac{1}{6}}, c_2 = 3^{-\frac{5}{6}}$, $y(x) = Bi(x)$.

根据 §4.1 的讨论，我们可把 x_0 为正则奇点的方程改写成下述形式

$$Ly = y'' + \frac{p(x)}{x-x_0} y' + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2} y = 0 \tag{4.2.12}$$

式中

$$p(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + \cdots \tag{4.2.13}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \cdots \tag{4.2.14}$$

为 x_0 的邻域内的解析函数，我们可假定该方程有 Frobenius 型级数解.

$$y=(x-x_0)^a\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{4.2.15}$$

且不防有 $a_0\neq 0$, 将上式代入方程 (4.2.12), 得

$$\begin{aligned}Ly=a_0(x-x_0)^{\alpha-2}[\alpha(\alpha-1)+p_0\alpha+q_0]\\+\sum_{n=1}^{\infty}(x-x_0)^{\alpha-2+n}\{p(\alpha+n)a_n\\+\sum_{k=0}^{n-1}[(\alpha+k)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\}=0\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

式中，记号

$$p(\alpha)=\alpha(\alpha-1)+p_0\alpha+q_0$$

α 要满足相应于该式的特征指数方程.

$$p(\alpha)=0 \tag{4.2.17}$$

α 称为特征指数 (indicial exponent). 同时还可得到递推关系

$$p(\alpha+n)\alpha_n=-\sum_{k=0}^{n-1}[(\alpha+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\alpha_k \tag{4.2.18}$$

究竟在什么情况下，才能得到两个 Frobenius 型级数解呢？如果不能，又有什么方法获得其它形式的解呢？这要分三种情况来讨论.

1. 特征方程的根不等，且 $\alpha_1-\alpha_2$ 不等于整数. 这时，递推公式 (4.2.18) 中

$$p(\alpha_i+n)\neq 0\quad (i=1,2;\ n=1,2,\cdots) \tag{4.2.19}$$

所以，对 $\alpha=\alpha_1,\alpha_2$, 我们可完全确定 Frobenius 型级数的系数，方程 (4.2.12) 有两个 Frobenius 型级数解.

2. 特征方程有等根， $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 这时，由于

$$p(\alpha+n)\neq 0 \tag{4.2.20}$$

我们可以得到，但仅可得到一个 Frobenius 型级数解．现在要设法找第二个线性独立解，我们已知

$$y_1=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{4.2.21}$$

暂且取 β 略不同于 α 以及

$$\widetilde{y}_1=(x-x_0)^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{a_n}(x-x_0)^n \tag{4.2.22}$$

我们使系数 $a_n(\beta)$ 满足递推关系 (4.2.18), 那么

$$L\widetilde{y}_1=a_0(x-x_0)^{\beta-2}p(\beta)$$

两边对 β 微商，再令 $\beta=\alpha$

$$L(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha})=a_0[(\alpha-2)(x-x_0)^{\alpha-3}p(\alpha)+(x-x_0)^{\alpha-2}p'(\alpha)]=0 \tag{4.2.23}$$

这是因为特征方程有重根 α 之故．这说明方程 (4.2.12) 的另一个与 y_1 线性独立的解为

$$y_1=\frac{\partial y_1}{\partial\alpha}=y_1\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\partial a_n}{\partial\alpha})(x-x_0)^n \tag{4.2.24}$$

3. 两根之差为整数，若 $\alpha_1=\alpha_2+N, N>0$. 这时，我们可以由

$$p(\alpha_1+n)\neq 0 \tag{4.2.25}$$

得到一个 Frobenius 型级数解．

$$y_1=(x-x_0)^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}(x-x_0)^n \tag{4.2.26}$$

但由于

$$p(\alpha_2+N)=0$$

除非 (4.2.16) 中第二项

$$\sum_{k=0}^{N-1}[(\alpha_2+k)p_{N-k}+q_{N-k}]a_k=0 \tag{4.2.27}$$

对特征指数 α_2, 一般不能得到 Frobenius 型级数解. 仿照有等根的情况, 还是取 α 略不同于 α_1, 系数 $a_n(\alpha)$ 满足递推关系的形式解.

$$\widetilde{y}_1=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{4.2.28}$$

代入方程 (4.2.12), 两边微商, 再令 $\alpha=\alpha_1$, 得

$$L[\left.\frac{\partial\widetilde{y}_1}{\partial\alpha}\right|_{\alpha_1}]=a_0(x-x_0)^{\alpha_2+N-2}p'(\alpha_2+N)\neq 0 \tag{4.2.29}$$

这是因为 α_2 并不是特征方程的重根的缘故, 我们再求非齐次方程

$$\begin{aligned}L(y)&=y''+\frac{p(x)}{x-x_0}y'+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y\\&=a_0(x-x_0)^{\alpha_2+N-2}p'(\alpha_2+N)\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

的 Frobenius 型级数解.

$$\overline{y}=(x-x_0)^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{4.2.31}$$

这样一来, 确定 c_N 的递推关系为

$$\begin{aligned}P(\alpha_2+N)c_N=-\sum_{k=0}^{N-1}[(\alpha+k)p_{N-k}+q_{N-k})c_k\\+a_0p'(\alpha_n+N)\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

适当调整系数 a_0, 使它满足使方程 (4.2.32) 右端为零的条件, 即

$$a_0=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1}[(\alpha+k)p_{N-k}+q_{N-k}]c_k}{p'(\alpha_n+N)} \tag{4.2.33}$$

非齐次方程 (4.70) 有 Frobenius 型级数解 (4.2.31), 那么

$$y_2 = \left(\frac{\partial \widetilde{y}_1}{\partial \alpha}\right)\bigg|_{\alpha=\alpha_1} - \overline{y}$$

就是原方程的另一个线性独立解，其一般形式为

$$y_2 = y_1(x)\ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \tag{4.2.34}$$

这就是 Fuchs 所预言的形式.

对于高阶方程，情况更要复杂一些，应该如何来进行求解请读者思考. 对于 x_0 为正则奇点的高阶方程，其一般形式为

$$y^{(n)} + \frac{q_{n-1}(x)}{x-x_0}y^{(n-1)} + \frac{q_{n-2}(x)}{(x-x_0)^2}y^{(n-2)} + \cdots \tag{4.2.35}$$

$$+\frac{q_0(x)}{(x-x_0)^n}y = 0$$

式中 $q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$ 在 x_0 邻域内解析，它的特征指数方程应为

$$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) + q_{n-1}(x_0)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)$$

$$+q_{n-2}(x_0)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+3) + \cdots + q_0(x_0) = 0 \tag{4.2.36}$$

[**例 4.2.3**] 求 Euler 方程的解

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \tag{4.2.37}$$

它可以化为

$$y'' + \frac{p_0}{x}y' + \frac{q_0}{x^2}y = 0 \tag{4.2.38}$$

它的特征方程为

$$\alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0 = 0 \tag{4.2.39}$$

当 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时，有解

$$y_1 = c_1x^{\alpha_1} \tag{4.2.40}$$

$$y_2 = c_2x^{\alpha_2} \tag{4.2.41}$$

当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 时，有解

$$y_1=c_1x^{\alpha} \tag{4.2.42}$$

$$y_2=c_2x^{\alpha}\ln x \tag{4.2.43}$$

显然，这是上面所讨论结果的特例.

[**例 4.2.4**] 用 Frobenius 方法，求修正的 Bessel 方程之解.

$$y''+\frac{1}{x}y'-(1+\frac{\nu^2}{x^2})y=0 \tag{4.2.44}$$

它的特征方程为

$$\alpha^2-\nu^2=0 \tag{4.2.45}$$

当 ν 不为零或整数时

$$I_{\pm\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2n\pm\nu}}{\Gamma(\pm\nu+n+1)n!} \tag{4.2.46}$$

这是两个线性独立解. 当 ν 为半整数时，刚好 (4.2.18) 右端为零，上式仍是方程的解.

当 $\nu=0$ 时，有重根，第一个解为

$$I_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}x)^{2n}}{(n!)^2} \tag{4.2.47}$$

为求出第二个解，先令 $\alpha\neq 0$, 将 Frobenius 型级数代入方程，得到递推关系， $a_0\neq 0$.

$$a_{2n-1}(\alpha)=0 \tag{4.2.48}$$

$$a_{2n}(\alpha)=\frac{a_0}{(\alpha+2n)^2(\alpha+2n-2)^2\cdots(\alpha+2)^2} \tag{4.2.49}$$

由此导出 $b_0\neq 0$.

$$b_{2n-1}=0 \tag{4.2.50}$$

$$b_{2n}=\left.\frac{\partial a_{2n}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=-\frac{a_0}{2^{2n}(n!)^2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) \tag{4.2.51}$$

由公式 (4.2.24) 得

$$y_2(x)=\ln xI_0(x)-a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2n}}{(n!)^2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) \tag{4.2.52}$$

一般，我们定义另一个修正的 Bessel 函数为

$$K_0(x)=-(\ln\frac{x}{2}+\gamma)I_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2n}}{(n!)^2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) \tag{4.2.53}$$

式中 γ 为 Euler 常数. 显然，它可由 I_0,y_2 线性组合来得到.

同样地，对于 ν 为整数时，譬如 $\nu=1$, 可以得到 Frobenius 型级数

$$I_1(x)=(\frac{x}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^{2n}}{n!(n+1)!} \tag{4.2.54}$$

并适当地选择常数后，得第二个线性独立解为

$$K_1(x)=(\gamma+\ln\frac{1}{2}x)I_1(x)+\frac{1}{x}-\frac{x}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}x)^{2n+1}}{n!(n+1)!}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+2}) \tag{4.2.55}$$

4.3 非正则奇点附近的渐近解

在 4.1 节，我们已经得到，在非正则点附近，至少有一个解有本性奇点. 对于二阶以上的方程来说，还有一个解可能是形式上的 Frobenius 型级数 (但它往往是发散的)(见例 4.1.6). 我们要给出二阶方程具有形式上 Frobenius 型级数解的条件.

定理一：对于 ∞ 是非正则奇点的二阶常微分方程

$$Ly=\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.3.1}$$

式中

$$p(x)=x^{n_1}(p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots)\quad p_0\neq 0 \tag{4.3.2}$$

$$q(x)=x^{n_2}(p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots)\quad q_0\neq 0 \tag{4.3.3}$$

该方程具有形式 Frobenius 型级数解的必要条件是

$$n_1 \geq n_2 + 1$$

证明：令

$$y(x) = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k} \tag{4.3.4}$$

$c_0 \neq 0$. 因为上述方程在 ∞ 处是非正则奇点，所以有 $n_1 > -1$, 或 $n_2 > -2$, 将式 (4.3.4) 代入方程 (4.3.1).

$$Ly = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha - k)(\alpha - k - 1)x^{-k-2}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^{n_1 - r} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha - k)x^{-k-1} + \sum_{s=0}^{\infty} q_s x^{n_2 - s} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k} = 0$$

我们要求同次幂项等于零. x^{-1} 的最低次幂项必在后面两个和式中出现. 若 $n_2 \geq n_1$, 得

$$c_0 = 0 \tag{4.3.5}$$

与原先假设矛盾.

若 $n_2 + 1 = n_1$, 得

$$q_0 + p_0 \alpha = 0$$

所以，特征指数为

$$\alpha = -\frac{q_0}{p_0} \tag{4.3.6}$$

若 $n_1 > n_2 + 1$, 得

$$\alpha = 0 \tag{4.3.7}$$

然后再推出递推公式.

这里，我们还要考虑 $p(x) \equiv 0$ 或 $q(x) \equiv 0$ 的情况 (但不能全等于零，因为 $x = \infty$ 是非正则奇点), 若 $p \equiv 0$ 得 $c_0 = 0$, 与假设矛盾. 若 $q \equiv 0$, 得 $\alpha = 0$, 依然可推出递推公式.

定理二：对于 $x=0$ 处有非正则奇点的二阶常微分方程

$$Ly=\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.3.8}$$

式中

$$p(x)=x^{n_1}(p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots)\,,\quad p_0\neq 0 \tag{4.3.9}$$

$$q(x)=x^{n_2}(q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots)\,,\quad q_0\neq 0 \tag{4.3.10}$$

在 $x=0$ 处有正则解的必要条件为

$$n_1\leq n_2+1 \tag{4.3.11}$$

证明，同样可假定

$$y(x)=x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{4.3.12}$$

$c_0\neq 0$, 对于 $x=0$ 为非正则奇点的情况， $n_1<-1$ 或 $n_2<-2$. 将 (4.3.14) 代入方程 (4.3.10) 得

$$Ly=x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{k-2}$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}p_rx^{n_1+r}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\alpha+k)x^{k-1}+\sum_{s=0}^{\infty}q_sx^{n_2+s}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0$$

这时， x 的最低次幂的项由后面两个乘积产生.

若 $n_2<n_1-1$, 要求

$$c_0=0 \tag{4.3.13}$$

与原假设矛盾

若 $n_2=n_1-1$, 要求

$$q_0+p_0\alpha=0 \tag{4.3.14}$$

特征指数

$$\alpha=-\frac{q_0}{p_0} \tag{4.3.15}$$

若 $n_2 > n_1 - 1$, 得

$$\alpha = 0 \tag{4.3.16}$$

即特征指数 α 为零.

这里还要讨论 $p(x) \equiv 0$ 或 $q(x) \equiv 0$ 的情况 (但不能全等于零, 因为这是非正则奇点).$p \equiv 0$ 时, 要求 $c_0 = 0$, 与假设矛盾. $q \equiv 0$ 时, 要求特征指数 $\alpha = 0$, 可以有 Frobenius 型的形式解.

如果在非正则奇点附近, 系数 $p(x), q(x)$ 不满足定理一, 定理二的条件, 我们可以求

$$y(x) = e^{s(x)} x^{\sigma} u(x) \tag{4.3.17}$$

形式的解. 在 ∞ 处, $s(x)$ 为 $x^{1/n}$ 的正次幂多项式. $u(x)$ 为 $x^{\frac{1}{n}}$ 的负幂次级数, 在原点处, s 为 $x^{\frac{1}{n}}$ 的负次幂多项式, $u(x)$ 为 $x^{\frac{1}{n}}$ 的正幂次级数. 这是本性奇点有代表性的表达形式. 当 $n = 1$ 时, 我们称这种解为常规解 (normal solution), $n \neq 1$ 时, 我们称这种解为次常规解 (subnormal solution), 次常规解的例子可见 4.1 节 [例 4.1.5].

[**例 4.3.1**] 求解 Hermite 方程

$$\psi'' + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi = 0 \tag{4.3.18}$$

在 ∞ 处的渐近解, 其中 λ, α 为常数.

因为 ∞ 为非正则奇点, 且不满足定理一的条件, 所以我们必须假定

$$\psi(x) = e^{Q(x)} v(x) \tag{4.3.19}$$

在上述变换下, v 的方程为

$$v'' + \tilde{p}(x) v' + \tilde{q}(x) v = 0 \tag{4.3.20}$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= 2Q' \\ \tilde{q}(x) &= q + Q'' + Q'^2 = (\lambda - \alpha^2 x^2) + Q'' + Q'^2 \end{aligned}$$

按照定理一的结论，$\tilde{p}$ 的阶数应高于 $\tilde{q}$ 的阶数，必须要求 Q 最高阶项为二次项，并且要将 q 中的二次项消去，因此

$$Q(x) = \pm\frac{\alpha}{2}x^2 \tag{4.3.21}$$

所以，$v(x)$ 所满足的方程 (4.3.20) 为

$$v'' \pm 2\alpha x v' + (\lambda \pm \alpha)v = 0 \tag{4.3.22}$$

该方程符合定理一的条件，可令

$$v = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{-k} \tag{4.3.23}$$

得特征指数为

$$\rho = \frac{\lambda - \alpha}{2\alpha} \tag{4.3.24}$$

系数的递推方程为

$$c_{2k+1} = 0 \tag{4.3.25}$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{(\rho - 2k + 2)(\rho - 2k + 1)\cdots\rho(\rho - 1)}{k!(4\alpha)^k} c_0 \tag{4.3.26}$$

原方程 (4.3.18) 的解为

$$\psi = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} x^{\frac{\lambda-\alpha}{2\alpha}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho(\rho - 1)\cdots(\rho - 2k + 2)(\rho - 2k + 1)}{k!(4\alpha)^k} x^{-2k} \tag{4.3.27}$$

当特征指数为整数时，仅含有有限项，即求和号 $\sum$ 内表示一多项式. 从这个例子，我们可以看到，定理一、二对于确定方程渐近解的作用. 另一个特征指数的情况可得类似的结果.

主项平衡法 (dominant balance) 可以帮助我们逐步求出式 (4.3.17) 形式解为 $s(x)$ 的渐近形式. 这是求非正则奇点附近渐近解指数因子的有效方法. 首先，我们可假定解的形式为

$$y \sim e^{s(x)} \tag{4.3.28}$$

式中 $b>0$

$$s(x)\sim\begin{cases} x^{b} & \infty\text{为非正则奇点} \quad (4.3.29) \\ & \qquad\qquad\qquad b>0 \\ x^{-b} & \text{原点为非正则奇点} \quad (4.3.30) \end{cases}$$

代入方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{4.3.31}$$

可得到

$$s''(x)+s'^{2}(x)+p(x)s'(x)+q(x)=0 \tag{4.3.32}$$

由于 $b>0$, 无论是原点或 ∞ 为非正则奇点时，都有

$$s''(x)\ll s'^{2}(x) \tag{4.3.33}$$

所以，关于 $s(x)$ 的近似方程为

$$s'^{2}(x)+ps'(x)+q=0 \tag{4.3.34}$$

求解上述一阶方程 (4.3.34), 便可得到 $s(x)$ 的主项，所以，主项平衡法的步骤为

(i) 假定主项的形式，略去可能的高阶项;

(ii) 求解 $s(x)$ 的方程;

(iii) 校验是否满足 $s''(x)\ll s'^{2}(x)$, 略去的是否高阶项. 而且，这一步骤可逐步进行下去，求出 $s(x)$ 的完全渐近展开式. 在这里我们用例子来进行说明.

[**例 4.3.2**] 求零阶 Bessel 方程

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0 \tag{4.3.35}$$

在 ∞ 处的渐近解. 因为在 ∞ 有非正则奇点，可设

$$y\sim e^{s(x)}$$

式中

$$s(x) \sim x^{\alpha} \tag{4.3.36}$$

它满足近似方程

$$\begin{array}{lll} s'^2 & +\dfrac{1}{x}s' & +1=0 \\ O(x^{2\alpha-2}) & O(x^{\alpha-2}) & O(1) \end{array} \tag{4.3.37}$$

各项的量阶已标出，讨论三种情况:

(i) 若第一、二项平衡， $\alpha=0$, 矛盾;

(ii) 若第一、三项平衡， $\alpha=1$, 成立;

(iii) 若第二、三项平衡， $\alpha=2$, 矛盾.

因此，仅取第二情况，得

$$s'^2(x)=-1$$

所以

$$s(x)=\pm ix \tag{4.3.38}$$

作变换

$$y=e^{\pm ix}w(x) \tag{4.3.39}$$

将 y 的方程变换为 w 的方程:

$$xw''+(1\pm 2ix)w'\pm iw=0 \tag{4.3.40}$$

按定理一，它可有形式解

$$w=x^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{-n} \tag{4.3.41}$$

得特征指数

$$\sigma=-\frac{1}{2} \tag{4.3.42}$$

由此可求出如下两个解：

$$y_1(x) = e^{ix}x^{-\frac{1}{2}}[1 - \frac{i}{8x} - \frac{(3!!)^2}{(8x)^2 2!} + \frac{(5!!)^2 i}{(8x)^3 3!} + \cdots] \quad (4.3.43)$$

$$y_2(x) = e^{-ix}x^{-\frac{1}{2}}[1 + \frac{i}{8x} - \frac{3!!}{(8x)^2 2!} + \frac{(5!!)^2 i}{(8x)^3 3!} + \cdots] \quad (4.3.44)$$

或者将实部虚部分开来进行组合

$$y^{(1)}(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}[u\cos x + v\sin x] \quad (4.3.45)$$

$$y^{(2)}(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}[u\sin x - v\cos x] \quad (4.3.46)$$

式中

$$u \sim 1 - \frac{(3!!)^2}{(8x)^2 2!} + \frac{(7!!)^2}{(8x)^4 4!} + \cdots \quad (4.3.47)$$

$$v \sim \frac{1}{8x} - \frac{(5!!)^2}{(8x)^3 3!} + \frac{(9!!)^2}{(8x)^5 5!} + \cdots \quad (4.3.48)$$

在第二章，我们已知零阶 Bessel 函数渐近展开的首项

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos x + \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin x)$$

对比 $y^{(1)}, y^{(2)}$ 渐近展开的首项，必有

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}y^{(1)}(\pi) + \sqrt{\frac{1}{\pi}}y^{(2)}(x) \quad (4.3.49)$$

即 $J_0(x)$ 是 $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x)$ 的线性组合，因此，由 (4.3.45) — (4.3.48) 可得 $J_0(x)$ 完全的渐近展开式

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(u\cos(x - \frac{\pi}{4}) + v\sin(x - \frac{\pi}{4})] \quad (4.3.50)$$

u, v 的表达式如 (4.3.47), (4.3.48) 所示．过去，我们用驻相法只得到了渐近展开的首项，而现在得到的是完全的渐近展开式．所以，用解微分方程的方法比原先又进了一步．

对于 Bessel 函数，我们还可以从物理上来推出上述结果．显然，Bessel 函数是柱面波的解．我们可以看作为由平面波

$$u = e^{i(ax+by)} \tag{4.3.51}$$

叠加而成，要求 $a^2+b^2=k^2, k$ 为波数．若 $a=k\cos\theta, b=k\sin\theta, x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos(\theta-\varphi)}d\theta \tag{4.3.52}$$

当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，它恰好就是零阶 Bessel 函数的积分表示．由于柱面波的能流守恒．

$$y \sim \frac{1}{\sqrt{r}}z \tag{4.3.53}$$

再作变换

$$z = e^{\pm ir}w \tag{4.3.54}$$

原方程变换为

$$w'' \pm 2iw' + \frac{1}{4r^2}w = 0 \tag{4.3.55}$$

再求形式解可以得到相同的结果．

［例 4.3.3］ 求下述方程：

$$x^3y'' - y = 0 \tag{4.3.56}$$

在原点附近的渐近解，原点是该方程的非正则奇点，我们要用主项平衡法逐步求解．设

$$y \sim e^{s(x)}$$

由主项平衡法得

$$s'^2 - \frac{1}{x^3} = 0 \tag{4.3.57}$$

即

$$s(x) \sim \pm\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \tag{4.3.58}$$

现在求 $s(x)$ 的下一阶近似，令

$$s(x) \sim \pm \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + c(x) \tag{4.3.59}$$

$c(x) = o(x^{-\frac{1}{2}})$, 将它代入 $s(x)$ 的准确方程 (4.3.42)

$$c''(x) \mp 2x^{-\frac{3}{2}} c'(x) + c'^2(x) \pm \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = 0 \tag{4.3.60}$$

由于 $c(x)$ 的量阶的规定. $c' = o(x^{-\frac{3}{2}}), c'' = o(x^{-\frac{5}{2}})$, 上式中第一、三项可以略去，求出

$$c'(x) \sim \frac{3}{4} x^{-1} \tag{4.3.61}$$

故有

$$c(x) \sim \frac{3}{4} \ln x \tag{4.3.62}$$

继续上述步骤，令

$$c(x) \sim \frac{3}{4} \ln x + D(x) \tag{4.3.63}$$

$D(x) = o(\ln x)$ 代入 $c(x)$ 的准确方程 (4.3.60), 得

$$D''(x) + D'^2 + (\frac{3}{2} x^{-1} \mp 2x^{-\frac{3}{2}}) D' - \frac{3x^{-2}}{16} = 0 \tag{4.3.64}$$

因为 $D' = o(\frac{1}{x}), D'' = o(\frac{1}{x^2})$, 因此只保留第三、五项,

$$D' \sim \mp \frac{3}{32} x^{-\frac{1}{2}} \tag{4.3.65}$$

解出

$$D(x) \sim \mp \frac{3}{16} x^{\frac{1}{2}} \tag{4.3.66}$$

我们对 $s(x)$ 的逐阶近似可求到这里为止. 因为

$$y \sim e^{\pm \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{4} \ln x \mp \frac{3}{16} x^{\frac{1}{2}} + \cdots} \tag{4.3.67}$$

其中第一项产生本性奇点因子 $e^{Q(x)}$, 第二项产生支点因子 $x^{\frac{3}{4}}$, 第三项产生 $x^{\frac{1}{2}}$ 的幂级数, 这时, 可用一般的待定系数法确定该次常规解分数幂级数的各项系数, 令

$$y = x^{\frac{3}{4}} \exp(2x^{-\frac{1}{2}}) w(x) \tag{4.3.68}$$

得

$$w'' + (\frac{3}{2x} - \frac{2}{x^{3/2}}) w' - \frac{3}{16x^2} w = 0 \tag{4.3.69}$$

令 $z = x^{\frac{1}{2}}$, 得

$$w'' - \frac{1}{z^2}(4 - 3z + z^2) w' - \frac{3}{4z^2} w = 0 \tag{4.3.70}$$

按定理二的条件, 可设

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4.3.71}$$

最后可得

$$y \sim x^{\frac{3}{4}} \exp(2x^{-\frac{1}{2}}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{3}{2})}{4^n n! \pi} x^{\frac{n}{2}} \tag{4.3.72}$$

类似地, 可以讨论 $s(x) \sim -2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \ln x + \cdots$ 的情况.

请注意, 级数 (4.3.72) 的收敛半径为

$$R = \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n \to \infty} \frac{16(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} = 0$$

上述级数是处处发散的, 所以, 我们称解 (4.3.72) 为方程 (4.3.56) 的渐近解.

由本节的论述, 我们可将在非正则奇点附近的渐近解特点归纳如下:

1. 含有 $e^{s(x)}$ 因子, 产生本性奇点;

2. 含有 x^{σ} 因子, 而且幂级数可以是分数幂的. 这是产生支点的原因;

3. 形式的级数解可能是发散的.

在这些方面与正常点，正则奇点附近级数解的性质在本质上是不同的.

4.4 再论 Airy 函数和 Stokes 现象

现在，我们要从解微分方程的角度来分析 Airy 函数的渐近行为， Airy 方程为

$$y''(x) - xy = 0 \tag{4.4.1}$$

显然， $x = \infty$ 为非正则奇点，令

$$y \sim e^{s(x)}$$

由主项平衡法得

$$s'^2(x) = x$$

因此

$$s(x) = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \tag{4.4.2}$$

再令

$$s(x) = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c(x)$$

式中 $c(x) = o(x^{\frac{3}{2}})$, 代入 $s(x)$ 的准确方程

$$s'' + s'^2 - x = 0$$

导出

$$c'' \pm \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + c'^2 \pm 2x^{\frac{1}{2}}c' = 0 \tag{4.4.3}$$

由于 $c' = o(x^{\frac{1}{2}})$ $c'' = o(x^{-\frac{1}{2}})$, 略去高阶项得

$$c' = -\frac{1}{4}x^{-1}$$

因此

$$c(x) = -\frac{1}{4}\ln x \tag{4.4.4}$$

同样，我们可以导出 $D(x) = \pm\frac{5}{48}x^{-\frac{2}{3}}$，这是产生形式级数解的项，我们可令

$$y(x) = a_1 x^{-\frac{1}{4}} \exp(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})w_1(x^{-\frac{3}{2}}) + a_2 x^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})w_2(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{4.4.5}$$

w_1, w_2 是 $x^{\frac{3}{2}}$ 的负次幂级数，这是 Airy 方程解的渐近展开的一般形式，在某一辐角范围内，第一项，第二项交替地起着主要作用，在某些线上，这两项又互相平衡，产生振荡形式的解，这就是发生 Stokes 现象的原因。

为了方便起见，我们用更简单的例子来予以说明．譬如

$$\mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \tag{4.4.6}$$

在右半平面，e^z 是主要的，e^{-z} 是超越小项，在左半平面 e^{-z} 是主要的，e^z 是超越小项，在虚轴 $z = iy$ 上，两项互相平衡，即 $\mathrm{ch}z = \cos y$．对于渐近展开

$$y \sim e^{s(x)}$$

我们规定

$$\mathrm{Re}\, s(x) = 0 \tag{4.4.7}$$

为 Stokes 线，在这条线上，函数是振荡型的，通过该线，渐近表达式可以是不相同的．我们还规定

$$\mathrm{Im}\, s(x) = 0 \tag{4.4.8}$$

为反 Stokes 线，在这条线上，主要部分与被略去的部分量阶相差最大．

根据上述规定，函数 $\mathrm{ch}z$ 的 Stokes 线在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 处，反 Stokes 线在 $\theta = 0, \pi$ 处，对于 Airy 函数，

$$s(x) = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} \tag{4.4.9}$$

所以，它的 Stokes 线在 $\theta=\pm\frac{1}{3}\pi,\pi$ 处，反 Stokes 线在 $\theta=0,\pm\frac{2}{3}\pi$ 处．有的书籍，对 Stokes, 反 Stokes 线的定义恰好相反．

由于这种 Stokes 现象的存在，我们往往在书本上查到某一辐角时也会有两种不同的渐近展开．但实质上，它们相差是超越小的量阶．为了避免这种任意性， Stokes 提出了一种方法．即，渐近展开式的改变仅发生在反 Stokes 线上，在那里，逆时针方向旋转时，增加超越小项乘以一个常数因子，该常数因子与主要部分系数的比值叫 Stokes 常数 T．对于某一函数来说，为保证旋转 360° 后函数保持不变，可以唯一地确定这些 Stokes 常数．一旦确定了这些 Stokes 常数后，我们便可由某一辐角时的渐近表示导出所有辐角范围的渐近表示，而且是唯一地确定的，这是 Stokes 冥思苦想了多少不眠之夜的成果 (Heading 1962).

我们还是用简单的例子来说，若

$$y\sim ae^{z}+be^{-z} \tag{4.4.10}$$

在上半平面成立，逆时针通过了反 Stokes 线 A_2(负实轴), 渐近展开为

$$y\sim(a+T_2b)e^{z}+be^{-z} \tag{4.4.11}$$

再从下半平面转到反 Stokes 线 A_1(正实轴), 通过它后，渐近展开又发生了改变

$$y\sim(a+T_2b)e^{z}+[b+T_1(a+T_2b)]e^{-z} \tag{4.4.12}$$

这时，表达式 (4.4.12) 应与 (4.4.10) 一致，可得

$$T_1=T_2=0 \tag{4.4.13}$$

同样地，我们可证明， Airy 函数的 Stokes 常数为 i. 那么，假定在 A_1(正实轴) 上

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \tag{4.4.14}$$

在通过反 Stokes 线 $A_2(\theta = \frac{2}{3}\pi)$ 时，渐近展开应为

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) + \frac{i}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \tag{4.4.15}$$

在 Stokes 线 S_1 上, 两项互相平衡, 若取 $\text{Arg}z = \pi, z^{\frac{1}{4}} = |z|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}\pi i}, z^{\frac{3}{2}} = -|z|^{\frac{3}{2}}i$

$$Ai(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{\frac{1}{4}}}\cos(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{\frac{1}{4}}}\sin(\frac{2}{3}|z| + \frac{\pi}{4}) \tag{4.4.16}$$

类似地，规定在 S_1 上

$$Bi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{\frac{1}{4}}}\cos(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})$$

也就是说

$$Bi(z) \sim \frac{i}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \tag{4.4.17}$$

那么，顺时针通过反 Stokes 线 A_2 时,

$$\begin{aligned} Bi(z) &\sim \frac{i}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) + (\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}} - \frac{i \cdot i}{2\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}})\exp(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}}\exp(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

这些结果都与已往的结果是一致的.

4.5 微分方程组的渐近解

由附录三，我们已经知道了矩阵函数的定义，性质和运算，可以应用于求解微分方程组.

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dz} = A\boldsymbol{w} \tag{4.5.1}$$

$$\boldsymbol{w}\,|_{z=0} = \boldsymbol{w}_0 \tag{4.5.2}$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 为 n 阶向量函数， A 为 $n \times n$ 阶矩阵， $\boldsymbol{w}_0$ 为初值. 可知其解为

$$\boldsymbol{w} = e^{Az}\boldsymbol{w}_0 \tag{4.5.3}$$

由无穷级数定义

$$\boldsymbol{w} = (E + Az + \frac{A^2z^2}{2!} + \cdots)\boldsymbol{w}_0$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{w}}{dz} &= (A + A^2z + \frac{1}{2!}A^3z^2 + \cdots)\boldsymbol{w}_0 \\ &= A(E + Az + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots)\boldsymbol{w}_0 \\ &= A\boldsymbol{w}\end{aligned}$$

显然 (4.5.3) 既满足方程，又满足初始条件. 同样地，非齐次方程

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dz} - A\boldsymbol{w} = F(z) \tag{4.5.4}$$

$$\boldsymbol{w}\,|_{z=0} = \boldsymbol{w}_0 \tag{4.5.5}$$

之解为

$$\boldsymbol{w} = e^{Az}\boldsymbol{w}_0 + \int_0^z e^{A(z-\tau)}F(\tau)d\tau \tag{4.5.6}$$

[例 4.5.1]

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = A\boldsymbol{X} \tag{4.5.7}$$

$$\boldsymbol{X}(0) = (1, 1, 1)^T \tag{4.5.8}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.5.9}$$

不难求出三个特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ 以及三个线性无关特征向量是 $\boldsymbol{X}_1 = (1,\ 5,\ 2)^T$, $\boldsymbol{X}_2 = (1,1,0)^T$, $\boldsymbol{X}_3 = (2,1,1)^T$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} = e^{At}\boldsymbol{X}(0) &= P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{bmatrix} P^{-1} \cdot \boldsymbol{X}(0) \\ &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 + 3e^{2t} - 8e^{3t} \\ -5 + 3e^{2t} - 4e^{3t} \\ -2 - 4e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

现在求解有奇点的方程组

$$z^P \frac{d\boldsymbol{w}}{dz} = A\boldsymbol{w} \tag{4.5.11}$$

为了得到解析表达式，这里假定 A 是 $n \times n$ 的常系数矩阵，那么方程 (4.5.11) 的解为

$$\boldsymbol{w} = \begin{cases} z^A\,, & \text{若 } p = 1 \\ \exp(\dfrac{z^{1-p}A}{1-p})\,, & \text{若 } p \neq 1 \end{cases} \tag{4.5.12}$$

容易证明上述两式是满足方程的. 现在来看二阶方程的特例，分下述两种情况:

1. A 可化为对角阵，即

$$A = S\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} S^{-1} \tag{4.5.13}$$

所以

$$w = \begin{cases} S\begin{pmatrix} z^{\lambda} & 0 \\ 0 & z^{\mu} \end{pmatrix} S^{-1}, & p = 1 \\ S\begin{pmatrix} \exp(\dfrac{z^{1-p}\lambda}{1-p}) & 0 \\ 0 & \exp(\dfrac{z^{1-p}\mu}{1-p}) \end{pmatrix} S^{-1}, & p \neq 1 \end{cases} \tag{4.5.14}$$

2. A 可化为 Jordan 型阵，即

$$A = S\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} S^{-1}$$

那么

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + K, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} w &= z^{A} = S\begin{pmatrix} z^{\lambda} & z^{\lambda}\ln z \\ 0 & z^{\lambda} \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= z^{\lambda}E + z^{\lambda}\ln z SKS^{-1} \\ &= z^{\lambda}E + z^{\lambda}\ln z(S(J-\lambda E)S^{-1}) \\ &= z^{\lambda}(1-\lambda\ln z)E + z^{\lambda}\ln zA \quad, p = 1 \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

同理

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \exp(\frac{z^{1-p}A}{1-p}) \\
&= S\begin{pmatrix} \exp(\frac{z^{1-p}\lambda}{1-p}) & \frac{z^{1-p}}{1-p}\exp(\frac{z^{1-p}\lambda}{1-p}) \\ & \exp(\frac{z^{1-p}\lambda}{1-p}) \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \exp(\frac{z^{1-p}\lambda}{1-p})E(1-\frac{\lambda z^{1-p}}{1-p}) \\
&\quad + \exp(\frac{z^{1-p}\lambda}{1-p})\frac{z^{1-p}}{1-p}A\ , \quad p \neq 1
\end{aligned} \tag{4.5.16}
$$

所以我们可以知道, $p=1$ 时, $z=0$ 或 ∞ 为正则奇点, $p>1$, $z=0$ 为非正则奇点, $p<1$, $z=\infty$ 为非正则奇点. 所以, 可以相应地求它们的 Frobenius 级数解或渐近解.

对于变系数方程组

$$z \cdot \frac{d\boldsymbol{w}}{dz} = A(z)\boldsymbol{w}\ , \qquad p=1$$

可令

$$\boldsymbol{w}(z) = z^{A}(\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 z + \cdots) \tag{4.5.17}$$

这是 Frobenius 级数解

$$z^{p}\frac{d\boldsymbol{w}}{dz} = A(z)\boldsymbol{w}\ , \qquad p<1$$

可令

$$\boldsymbol{w}(z) = e^{q(z)}(\boldsymbol{u}_0 + \frac{\boldsymbol{u}_1}{z} + \frac{\boldsymbol{u}_2}{z^2} + \cdots)$$

其中

$$q(z) = \lambda_0 \frac{z^{r+1}}{r+1} + \ldots + \lambda_r z + \lambda_{r+1}\ln z \tag{4.5.18}$$

系数 λ_0, λ_1, $\cdots$, λ_{r+1} 及 $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}_1$, $\cdots$ 为待定, 详细例子可见 (Sirovich 1971). 我们回过头来, 再来看高阶方程的情形

$$w^{(n)}(t) + p_1(z)w^{(n-1)}t \cdots + p_n(z)w = 0 \tag{4.5.19}$$

其中

$$p_i(z) = \frac{q_i(z)}{z^i}$$

$q_i(z)$ 为解析函数，可作如下变换，令

$$u_j = z^{j-1} w^{j-1}(z)$$

那么

$$z\frac{du_j}{dz} = (j-1)u_j + u_{j+1} \qquad j = (1, 2, \cdots n-1)$$

$$z\frac{du_n}{dz} = (n-1)u_n + z^n w^{(n)} = -q_n u_1 - q_{n-1} u_2 \cdots + (n-1-q_1)u_n$$

所以，可化为方程组

$$z\frac{d\boldsymbol{u}}{dz} = A(z)\boldsymbol{u}$$

其中

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ -q_n(z) & -q_{n-1}(z) & \cdots & & n-1-q_1(z) \end{pmatrix} \tag{4.5.20}$$

所以，在上述情况下，其解有正则奇点，所得结论与原先一致，高阶方程只是方程组的特例.

4.6 差分方程的渐近解

相应于微分方程有连续自变量的情况，我们进一步讨论差分方程有离散自变量的情况. 在实际问题中，也经常会遇到差分方程，并需要求 $n \to \infty$ 时的行为，比如迭代、递推公式或差分方法都可导出差分方程，差分方程的一般求解方法请见附录 A.4，本节主要介

绍差分方程的奇点分类、性质及近似解 (包括 Frobenius 级数解或渐近解) 的方法.

定理: 若对应微分方程在 ∞ 处为正常点或正则奇点, 那么, 当 $n \to \infty$ 时, a_n 与 $f(x)$ 的主要行为是一致的.

以一阶方程

$$a_{n+1} = [1 + p(n)]\, a_n \tag{4.6.1}$$

为例, 其对应微分方程为

$$y'(x) = p(x)y(x) \tag{4.6.2}$$

若 $p(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x^2} + \cdots$, 则

$$y(x) \sim cx^{\alpha} \tag{4.6.3}$$

然而, 上述差分方程之准确解为

$$a_n = a_1 \exp(\sum_{k=1}^{n-1} \ln [1 + p(k)])\ , \qquad n \geq 2 \tag{4.6.4}$$

由 $p(n) = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + \cdots$ 可见

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln [1 + p(k)] = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta - \frac{1}{2}\alpha^2}{k^2} + \cdots)$$

当 $n \to \infty$ 时, 仅首项发散, 因 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma$, 其中 γ 为 Euler 常数 0.5772, 所以

$$\sum_{1}^{n-1} \ln [1 + p(k)] = \alpha \ln n + c \tag{4.6.5}$$

其中 $c = \alpha \cdot \gamma + \dfrac{\pi^2}{6}(\beta - \dfrac{1}{2}\alpha^2)$, 所以

$$a_n \sim a_1 n^{\alpha} e^{c} \tag{4.6.6}$$

可见 $f(x)$ 与 a_n 在 ∞ 邻域有相同的行为.

因此, 对于差分方程, 我们首先用微分比拟法找到与它对应的微分方程, 由该微分方程的奇点性质定义为差分方程的奇点性质, 比拟时用公式

$$x \to n, \qquad a_n \longleftrightarrow y(x) \tag{4.6.7}$$

$$D^k a_n = \sum_{j=0}^{k} C_k^j a_{n+k-j} \longleftrightarrow y^{(k)}(x) \tag{4.6.8}$$

请注意, 如果在 ∞ 处它们是非正则奇点, 且变化很快, 那么微分方程和差分方程的渐近行为往往可以有很大的差异.

[**例 4.6.1**]　$a_{n+1} = -a_n$ 对应于 $y' = -2y$, 在 ∞ 处有非正则奇点. 　$a_n = (-1)^n C$, 而 $y = Ce^{-2x}$.

[**例 4.6.2**]　$a_{n+1} = na_n$, 对应于 $y' = (x-1)y$, 在 ∞ 处有非正则奇点, 　$a_n = C(n-1)!$ 而 $y(x) = C\exp(\frac{x^2}{2} - x)$

类似于微分方程, 我们可在正常点和正则奇点附近求其 Taylor 级数解或 Frobenius 级数解即令

$$a_n = n^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{n^k} \tag{4.6.9}$$

若 $\alpha = 0$ 就是 Taylor 级数, 有时为了求系数方便可假定

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k-\alpha)} \tag{4.6.10}$$

这是因为

$$D\left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k-\alpha)}\right] = (\alpha - k)\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}$$

的缘故, 我们举一个实例.

[**例 4.6.3**]　求 $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n^2})a_n$ 之级数解.

如前面的分析，在 $n=\infty$ 处有正常点，可以展开成 (4.6.9) 形式的级数，但求系数十分麻烦. 将差分方程改写成 $n^2 Da_n = a_n$，取 $\alpha=0$，再将 (4.6.10) 代入可得

$$-\sum_{k=0}^{\infty} kn^2 B_k \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)}$$

由公式 $n^2=(n+k)(n+k-1)-(2k-1)(n+k)+k^2$ 可知

$$n^2\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k+1)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k-1)} - (2k-1)\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)} + k^2\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k+1)}$$

推出

$$-\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)B_{k+1}-k(2k-1)B_k+(k-1)^2B_{k-1}]\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty} B_k\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)} \tag{4.6.11}$$

这里规定 $B_{-1}=0$，便有递推公式

$$B_{k+1}=\frac{1}{k+1}(2k^2-k-1)B_k-\frac{(k-1)^2}{k+1}B_{k-1} \tag{4.6.12}$$

所以，$B_1=-B_0$，$B_2=0$，$B_3=\frac{1}{3}B_0$，$B_4=\frac{7}{6}B_0$，由 B_k 之渐近行为，可证明 (4.6.10) 收敛.

对于二阶差分方程，在正则奇点附近有以有两个特征指数 α_1，α_2，若它们相等或相差一个整数，那么其解的形式可以是 $\ln n$ 或者双 Γ 函数 $\psi(n)$ 乘以 Frobenius 级数 (4.6.10)，因为 $\psi(n)=\Gamma'(n)/\Gamma(n)$ 满足 $D\psi(n)=\frac{1}{n}$，所以 $\psi(n)\sim\ln n$.

为了在非正则奇点附近求渐近解，首先必须分离出支配因子来，然后再求其高阶修正. 分离支配因子的方法有：

1. 如果差分方程对应的微分方程在 ∞ 处的行为是对数函数，代数或缓变指数函数，即 $y(x)\sim e^{ax^b}$，$b<1$，那么可用对应微分方程的支配因子找到差分方程的支配因子.

[例 4.6.4]　$Da_n = a_{n+1} - a_n = a_n/\sqrt{n} + a_n/n$, 对应微分方程 $y' = y/\sqrt{x} + y/x$, $y \sim \exp(2\sqrt{x})$, 而差分方程支配因子为 $a_n \sim \exp(2\sqrt{n})$.

2. 指数变换法, 这种方法对于 $n \to \infty$ 时变化剧烈的情况特别有用, 一般可令 $a_n = e^{S_n}$, 由此可得

$$Da_n = a_n(e^{DS_n} - 1)$$

$$D^2a_n = a_n\left[(e^{DS_n} - 1)^2 + e^{2DS_n}(e^{DS_n} - 1)\right]$$

若 $D^2S_n \ll 1$, $D^2S_n \ll (DS_n)^2$, 便可推出

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n e^{DS_n} \\ a_{n+2} &\sim a_n e^{2DS_n} \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

一般地, $D^kS_n \ll 1$, $D^kS_n \ll (DS_n)^k$, 可得

$$a_{n+p} \sim a_n e^{pDS_n} \tag{4.6.14}$$

从上述量阶估计, 可得 $n \to \infty$ 时, a_n 的支配因子

[例 4.6.5]　$a_{n+2} = 3na_{n+1} - 2n^2a_n$

由上述近似关系可导出

$$(e^{DS_n})^2 - 3ne^{DS_n} + 2n^2 = 0\,, \qquad n \to \infty \tag{4.6.15}$$

所以 $e^{DS_n} \sim n$ 或 $2n$, $DS_n \sim \ln n$ 或 $\ln 2n$

$$S_n \sim \sum_{k=1}^{n} \ln k \sim n \ln n \tag{4.6.16}$$

所以 $a_n \sim n^n$

3. 主项平衡法, 我们用下述例子来说明.

[例 4.6.6]　$a_{n+2} - na_{n+1} + a_n = 0$

讨论三种情况: $a_n \ll a_{n+2}$, $a_n \gg a_{n+2}$, $na_{n+1} \ll a_n$ 第三种情况不自洽, 只讨论 $a_n \ll a_{n+2}$, $a_n \gg a_{n+2}$ 的情况, 由 $a_n \ll a_{n+2}$

$$a_{n+2} - na_{n+1} = 0 \tag{4.6.17}$$

所以 $a_n=(n-1)!\sim n^n$. 由 $a_n\ll a_{n+2}$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-\frac{1}{n}a_n&=0\\
a_n&=\frac{1}{(n-1)!}\sim n^{-n}
\end{aligned}
\tag{4.6.18}
$$

现在用 Γ 函数的 Stirling 公式来说明求非正则奇点附近渐近解的完整过程

[**例 4.6.7**] Stirling 公式，由 Γ 函数满足关与方程

$$a_{n+1}=na_n \tag{4.6.19}$$

令 $a_n=e^{S_n}$，$e^{DS_n}=n$, $DS_n=\ln n$，所以

$$a_n\sim n^n \tag{4.6.20}$$

令 $a_n=b_nn^n$ 代入原差分方程，导出 b_n 满足的差分方程为

$$b_{n+1}=b_n(1+\frac{1}{n})^{-n-1} \tag{4.6.21}$$

由于系数趋于 e^{-1}, 故 $b_n\sim e^{-n}$, 令 $a_n=(\frac{n}{e})^nc_n$, 可得 c_n 满足下述差分方程

$$c_{n+1}=c_ne(1+\frac{1}{n})^{-n-1} \tag{4.6.22}$$

令 $Q=e(1+\frac{1}{n})^{-n-1}$

$$\ln Q=1-(n+1)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots)=-\frac{1}{1.2n}+\frac{1}{2.3n^2}-\frac{1}{3.4n^3}+\cdots$$

$$c_{n+1}=c_n(1-\frac{1}{2n}+\frac{7}{24n^2}-\frac{3}{16n^3}+\cdots) \tag{4.6.23}$$

由方法 1, 可知其渐近行为为 $y'-\frac{1}{2x}y=0$, 方程解的渐近行为一样，$c_n\sim\frac{k}{\sqrt{n}}$. 令 $c_n=kn^{-\frac{1}{2}}d_n$

$$d_n\sim 1+A_1n^{-1}+A_2n^{-2}+\cdots \tag{4.6.24}$$

d_n 的差分方程为

$$d_{n+1} = d_n(1 - \frac{12}{n^2} + \frac{12}{n^3} \cdots) \tag{4.6.25}$$

将式 (4.6.24) 代入便可求出系数 $A_1, A_2, \cdots$, 所以

$$a_n \sim kn^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}(1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i n^{-i}) \qquad n \to \infty \tag{4.6.26}$$

其中 $A_1 = \frac{1}{12}$, $A_2 = \frac{1}{288}$. 同第二章中导出的公式 (2.4.16) 比, 相差一个常数, 这对于线性差分方程来说是不足为奇点. 所以, 要通过用积分形式表达的 Γ 函数渐近展开比较, 可确定 $k = \sqrt{2\pi}$

$$a_n \sim \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}(1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i n^{-i}) \qquad n \to \infty \tag{4.6.27}$$

我们可以一直展开函数至负 n 次幂的无限项表达式.

习　　题

4.1　试将下列微分方程的所有奇点分类:

(a) $xy'' + (b - x)y' - ay = 0$

(b) $x^2 y'' + (\frac{1}{4} - \mu^2 + kx - \frac{x^2}{4})y = 0$

(c) $y'' + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)y = 0$

(d) $y'' + (h - 2\theta\cos 2x)y = 0$

(e) $(1 - x^2)y'' - 2xy + \left[\lambda + 4\theta(1 - x^2) - \mu^2(1 - x^2)^{-1}\right] y = 0$

4.2　试求初值问题

$$(x-1)(x-2)y'' + (4x-6)y' + 2y = 0$$

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$$

的 Taylor 展开, 并估计其收敛范围.

4.3 求下述方程

$$x^2y''' + 3xy'' + (1-x)y' - y = 0$$

的 Frobenius 级数解.

4.4 在原点附近求下述方程

$$x^3y'' + x(1-x)y' - 2y = 0$$

的渐近解.

4.5 在原点附近求下述方程

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = 0$$

的渐近解.

4.6 在 ∞ 附近求下述方程

$$xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$$

的渐近解.

4.7 对下列方阵求矩阵函数 e^{At},$\sin At$, $\cos At$

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4.8 用矩阵函数求解方程组

$$\frac{dw}{dt} = Aw + \boldsymbol{F}(t)$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}, \qquad F(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}(o)=(1,1,1)^T$$

4.9 试解下列差分方程:

(a) $a_{n+2}-5a_{n+1}+a_n=o \qquad (a_o=0,\ a_1=1)$

(b) $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=0$、 $(a_0=1,\ a_2=2,\ a_3=5)$

(c) $a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n=0 \qquad (a_0=1,\ a_1=1)$

(d) $a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0 \qquad (a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2)$

4.10 试求下列差分方程主要行为的支配因子:

(a) $a_{n+2}-n^2a_{n+1}+(2n^2-4)a_n=0$

(b) $(n+3)a_{n+2}-(n+3)a_{n+1}-2na_n=0$

(c) $a_{n+2}-a_{n+1}-n^2a_n=0$

(d) $n^2D^2a_n-2nDa_n+2a_n=n^2$

第五章 WKB方法

在理论研究中，我们经常会遇到如下一类含有大参数的微分方程：

$$y'' + [\lambda^2 q_1(x) + q_n(x)]y = 0 \tag{5.0.1}$$

其中，$q_1(x), q_2(x)$ 是已知函数，自变量 x 也可以看作复数域的. 我们要研究 $\lambda \to \infty$ 时解的渐近行为. 但对于自变量 x 而言，本章研究解的全局性质，这一点是与前面几章不相同的.

在历史上，最早使用这一方法的要追溯到 Carlini(1817) 对于 Bessel 方程的研究， 1837 年， Liouville, Green 用变换方法解决了无转向点的情况，本世纪初 Lord Rayleigh (1912) 研究了波的传播问题， 1926 年， Wentzel, Krammer, Brillouin 用这一方法研究量子力学中的 Schrödinger 方程， Gans, Jefferey 给出了连续公式，所以，这一方法被命名为 WKB 方法. 但 Bailey 认为，应按照历史发展情况，称它为 LR 近似， Jefferey 则称它为 Green 近似. 接着， Langer(1931) 和 Olver(1954) 获得了一致有效渐近解， 1958 年， Keller 将上述方法推广到三维情形，发展了几何光学的数学理论， 60 年代后，在这方面的主要进展是研究焦散线 (caustics) 附近的解. WKB 方法的主要优点是，它不仅可以获得一般二阶变系数方法的通解，而且它的精神同样适用于其它形式的方程. 所以，近年来，在流动稳定性和星系密度波理论中，仍然得到了广泛应用.

在这一章，我们将按照上述历史发展的线索分别叙述无转向点的情况，有转向点的情况以及几何光学近似等方面的内容.

5.1 WKB 解

在本节，我们要导出方程 (5.0.1) 在无转向点 (turning point),

即无 $q_1(x)=0$ 之点的情形下的通解. 我们首先用 Liouville-Green 变换来进行求解, 这也是下面求一致有效渐近解 Langer 变换的基本出发点, 令

$$z=\varphi(x) \tag{5.1.1}$$

$$v=\psi(x)y(x) \tag{5.1.2}$$

这时, 原方程 (5.0.1) 就变成

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{\varphi'^2}(\varphi''-\frac{2\varphi'\psi'}{\psi})\frac{dv}{dz}+\frac{1}{\varphi'^2}[\lambda^2q_1+q_2-\psi(\frac{\psi'}{\psi^2})']v=0$$

这里, 我们同时对自变量和因变量进行变化, 但对 φ,ψ 的选择有一定自由度, 一个很自然的想法就是要求一阶项为零, 即

$$\varphi''-\frac{2\varphi'\psi'}{\psi}=0 \tag{5.1.3}$$

由此导出

$$\varphi'=\psi^2 \tag{5.1.4}$$

此外, 我们还要求最后一项的主要部分是常系数的, 即

$$\varphi'^2=q_1 \tag{5.1.5}$$

从 (5.1.4), (5.1.5) 可以用已知函数 q_1 来表达 φ 和 ψ, 即

$$\psi=[q_1(x)]^{\frac{1}{4}} \tag{5.1.6}$$

$$\varphi=\int^x\sqrt{q_1(\tau)}d\tau \tag{5.1.7}$$

在上述条件下, 原方程 (5.0.1) 就简化为

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\lambda^2v=\delta v \tag{5.1.8}$$

式中

$$\delta=\frac{1}{4}\frac{q_1''}{q_1^2}-\frac{5}{16}\frac{q_1'^2}{q_1^3}-\frac{q_2}{q_1}$$

若在所研究的区域内 $q_1(x)$ 不为零, $q_1(x)$ 两次连续可微, $q_2(x)$ 无奇点, δ 与 λ 相比是小量, 所以, 方程 (5.1.8) 渐近解的首项为

$$v \sim a\cos\lambda z + b\sin\lambda z\ , \quad \lambda\to\infty$$

方程 (5.0.1) 的渐近解首项为:

$$y \sim \begin{cases} \dfrac{a\cos[\lambda\int\sqrt{q_1(\tau)}]d\tau + b\sin[\lambda\int\sqrt{q_1(\tau)}d\tau]}{[q_1(x)]^{\frac{1}{4}}} \\ \qquad q_1(x)>0, \quad \lambda\to\infty & (5.1.9) \\ \dfrac{a\exp[\lambda\int\sqrt{-q_1(\tau)}d\tau] + b\exp[\lambda\int\sqrt{-q_1(\tau)}d\tau]}{[-q_1(x)]^{\frac{1}{4}}} \\ \qquad q_1(x)<0, \quad \lambda\to\infty & (5.1.10) \end{cases}$$

从解 (5.1.9), (5.1.10) 可以看出, 当 $q_1(x)>0$ 时, 解是振荡型的, 当 $q_1(x)<0$ 时, 解是指数型的.

下面, 我们还要通过指数近似法来导出同一结果. 因为将同一步骤推广到三维情况, 就可获得几何光学近似. 令

$$y(x) \sim \exp[\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n(x)] \qquad (5.1.11)$$

因此

$$y'(x) \sim [\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n'(x)]\exp[\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n(x)]$$

$$y''(x) \sim \{\lambda^2[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n'(x)]^2 + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n''(x)\}\exp[\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}s_n(x)]$$

代入原方程, 令 λ 的同次幂系数相等, 可得递推方程组

$$s_0'^2 = -q_1(x)$$

$$2s_0's_1' + s_0'' = 0$$

$$2s_0's_2' + s_1'' + s_1'^2 = -q_2(x)$$

$$2s_0's_n' + s_{n-1}'' + \sum_{j=1}^{n-1}s_j'\cdot s_{n-j}' = 0\ , \quad n>2 \qquad (5.1.12)$$

由此解出

$$s_0(x) = \pm \int \sqrt{-q_1(\tau)d\tau} \tag{5.1.13}$$

$$s_1(x) = -\frac{1}{2}\ \ln s_0' = -\frac{1}{4}\ln[-q_1(x)] \tag{5.1.14}$$

将 $s_0(x), s_1(x)$ 代入 (5.1.11), 又重新得到了 WKB 解 (5.1.9), (5.1.10). 从推导过程，我们看出， WKB 解成立的条件是:

1. $\dfrac{s_{n+1}(x)}{s_n(x)}$ 有界，这是渐近展开式的要求;
2. 由渐近解的定义，还要求

$$\frac{y(x) - \exp[\lambda \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^{-n} s_n(x)]}{y(x)} \ll 1$$

即，要求解的相对误差很小，这就相当于:

$$\lambda^{-n} s_{n+1}(x) \ll 1$$

由于我们所能精确求解的微分方程数量极其有限，即使二阶线性变系数方程，也只有少数几种方程可用特殊函数来表示. 因此，WKB 近似可以对任意的 $q_1(x), q_2(x)$ 获得通解，这确实是有相当重要意义的. 当然，这里附加的条件是必须含有大参数 λ.

下面，我们将用 WKB 近似求解二阶方程的初值问题，边值问题和特征值问题，从中我们也可看到 WKB 近似的普遍意义.

[**例 5.1.1**]　求下述方程的初值问题:

$$y'' = \lambda^2 Q(x) y\ , \quad Q(x) > 0 \tag{5.1.15}$$

$$y(0) = A\ , \quad y'(0) = B \tag{5.1.16}$$

由 WKB 近似

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{Q(x)}}[a\text{ch}\lambda \int_0^x \sqrt{Q(\tau)}d\tau + b\text{sh}\lambda \int_0^x \sqrt{Q(\tau)}d\tau] \tag{5.1.17}$$

由初始条件 (5.1.16)

$$\frac{a}{\sqrt[4]{Q(0)}} = A \tag{5.1.18}$$

$$-\frac{1}{4}[Q'(0)]^{-\frac{5}{4}}a + \lambda[Q(0)]^{\frac{1}{4}}b = B \tag{5.1.19}$$

解出

$$a = A\sqrt[4]{Q(0)}$$

$$b = \frac{1}{\lambda[Q(0)]^{\frac{1}{4}}}\{B + \frac{1}{4}\frac{[Q(0)]^{\frac{1}{4}}}{[Q'(0)]^{\frac{5}{4}}}A\} \tag{5.1.20}$$

方程 (5.1.15), (5.1.16), (5.1.17) 之解为

$$y = A\sqrt[4]{\frac{Q(0)}{Q(x)}}\mathrm{ch}\lambda\int_0^x\sqrt{Q(\tau)}d\tau + \frac{1}{\lambda\sqrt[4]{Q(0)Q(x)}}\{B$$

$$+\frac{1}{4}\frac{[Q(0)]^{\frac{1}{4}}}{[Q'(0)]^{\frac{5}{4}}}A\}\mathrm{sh}\lambda\int_0^x\sqrt{Q(\tau)}d\tau \tag{5.1.21}$$

特别对于 $A = 0, B = 1, Q(x) = (1+x^2)^2$

$$y \sim \frac{1}{\lambda(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{sh}\lambda(x+\frac{x^3}{3}) \tag{5.1.22}$$

[**例 5.1.2**] 求解边值问题

$$\varepsilon y'' + y = 0 \tag{5.1.23}$$

$$y(0) = 0\ , \qquad y(1) = 1 \tag{5.1.24}$$

的渐近解，这里 $Q(x) = -1, \lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 故而它的 WKB 近似为

$$y(x) \sim c_1\cos\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} + c_2\sin\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.1.25}$$

代入边界条件 (5.1.24) 确定常数 c_1, c_2, 得

$$y = \frac{\sin \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \tag{5.1.26}$$

这是高阶导数项乘以小参数形式的奇异摄动问题,边界层方法失效,但 WKB 方法却依然有效. 从解的图形可见, 这是高速振荡的解,边界层方法失效是不足为奇的.

[例 5.1.3] 讨论本征值问题

$$y'' + E(\pi + x)^4 y = 0 \tag{5.1.27}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{5.1.28}$$

我们可马上写出方程 (5.1.27) 的 WKB 近似

$$y \sim \frac{1}{\pi + x}[c \sin \sqrt{E} \int_0^x \sqrt{Q(\tau)} d\tau + d \cos \sqrt{E} \int_0^x \sqrt{Q(\tau)} d\tau] \tag{5.1.29}$$

为了满足条件 (5.1.28), 要求 $d = 0$ 以及

$$\sqrt{E_n} \int_0^\pi \sqrt{Q(\tau)} d\tau = n\pi \tag{5.1.30}$$

以 $Q(x)$ 的具体形式 $(\pi + x)^4$ 代入, 可求出第 n 个本征值

$$E_n \sim \frac{9n^2}{49\pi^4} \tag{5.1.31}$$

相应的本征函数为

$$y_n \sim \frac{c_n}{\pi + x} \sin[\frac{n}{7\pi^2} x(3\pi^2 + 3\pi x + x^2)] \tag{5.1.32}$$

归一化时, 要求

$$\int_0^\pi Q(x) y_n^2(x) dx = 1$$

即

$$c_n^2 \int_0^{\pi} \sqrt{Q(x)} \sin^2 \sqrt{E_n} \int_0^{x} \sqrt{Q(\tau)} d\tau \quad dx = 1$$

令

$$u = \sqrt{E_n} \int_0^{x} \sqrt{Q(\tau)} d\tau \tag{5.1.33}$$

再根据 (5.1.30) 可以求出 u 的积分上下限，得条件

$$\frac{c_n^2}{\sqrt{E_n}} \int_0^{n\pi} \sin^2 u du = 1$$

所以

$$c_n = 2^{\frac{1}{2}} E_n^{\frac{1}{4}} / \sqrt{n\pi} = \sqrt{\frac{6}{7\pi^3}} \tag{5.1.34}$$

归一化的本征函数为

$$y_n \sim \sqrt{\frac{6}{7\pi^3}} [\sin \frac{n}{7\pi^2} x(3\pi^2 + 3\pi x + x^2)]/(\pi + x) \tag{5.1.35}$$

当 n 越大，结果越精确，表 5.1.1 给出了本征值的近似值与精确值的比较

表 5.1.1　WKB 近似求本征值的精确程度

n	E_n(WKB 近似)	E_n(精确)	相对误差
1	0.00188559	0.00174401	8.1%
2	0.00754235	0.00734865	2.6%
3	0.0169703	0.0167524	1.3%
4	0.0301694	0.0299383	0.77%
5	0.0471397	0.0469006	0.51%
10	0.188559	0.188305	0.13%
20	0.754235	0.753977	0.035%
40	3.01694	3.01668	0.009%

5.2 有转向点时的一致有效渐近解

上面一节所得到的 WKB 解，当 $q_1(x)$ 在所讨论的区域中有零点时是不成立的，这是因为

1. Green-Liouville 变换

$$v=\phi(x)y(x)=\sqrt[4]{Q_1(x)}y(x)$$

有奇点.

2. 指数近似法中, $s_0(x)=\pm\int^x\sqrt{-q_1(\tau)}d\tau$, $s_1(x)=\frac{1}{4}\ln(-q_1(x))$, 不满足

$$\left|\frac{s_1(x)}{s_0(x)}\right|<M$$

的条件. 为了处理有转向点的情况，我们可以分成几个区域求解，然后再将它们匹配 (matching) 起来，也可以用 Langer 变换直接求在整个区域内的一致有效渐近解.

1. 匹配方法. 我们假定 $x=\mu$ 处有单零点

$$q_1(x)=(x-\mu)f(x) \tag{5.2.1}$$

不妨假定 $f(x)>0$. 显然, 原先的 WKB 解 (5.1.9), (5.1.10) 在 $x=\mu$ 附近不适用. 作变换

$$\xi=(x-\mu)\lambda^{\nu}\,,\quad \nu>0 \tag{5.2.2}$$

也就是说，将 $x=\mu$ 附近的坐标放大一些，方程 (5.0.1) 就变换成

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\{\lambda^{2-3\nu}\xi f(\mu+\xi\lambda^{-\nu})+\lambda^{-2\nu}q_2(\mu+\xi\lambda^{-\nu})\}y=0 \tag{5.2.3}$$

分如下三种情况来讨论:

(i) $\nu<\frac{2}{3}$, 当 $\lambda\to\infty$ 时，解为 $y\sim 0$.

(ii) $\nu>\frac{2}{3}$. 当 $\lambda\to\infty$ 时，解为 ξ 的线性函数.

(iii) 当 $\nu=\frac{2}{3},\lambda\to\infty$ 时， y 满足方程

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\xi f(\mu)y=0 \tag{5.2.4}$$

由此可见，只有第三种选择才能满足匹配条件. 在变换

$$z=-\xi\sqrt[3]{f(\mu)} \tag{5.2.5}$$

下，它又变换成 Airy 方程

$$\frac{d^2y}{dz^2}-zy=0 \tag{5.2.6}$$

所以

$$y\sim a_3Ai(z)+b_3Bi(z) \tag{5.2.7}$$

已知 $Ai(z),Bi(z)$ 的渐近展开

$$Ai(z)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}\exp(-\dfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) & z\to+\infty\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}|z|^{-\frac{1}{4}}\sin(\dfrac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}+\dfrac{\pi}{4}) & z\to-\infty\end{cases} \tag{5.2.8}$$

$$Bi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}\exp(\dfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}) & z\to+\infty\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}|z|^{-\frac{1}{4}}\cos(\dfrac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}+\dfrac{\pi}{4}) & z\to-\infty\end{cases} \tag{5.2.9}$$

所以，在 $x>\mu$ 且不靠近 μ 时， $\xi\to+\infty,z\to-\infty$

$$y\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}\xi^{\frac{1}{4}}[f(\mu)]^{\frac{1}{12}}}[a_3\sin(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4})$$
$$+b_3\cos(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4})]$$

当 $x<\mu$, 且不靠近 μ 时， $\xi\to-\infty,z\to+\infty$

$$y\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}|\xi|^{\frac{1}{4}}[f(\mu)]^{\frac{1}{12}}}\{\frac{1}{2}a_3\exp(-\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}}) \tag{5.2.10}$$
$$+b_3\exp(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}})\}$$

但在 $x>\mu, x<\mu$ 两个区域内，我们也可用 WKB 方法得到近似解，因为 $x\to\mu$ 时

$$[q_1(x)]^{\frac{1}{4}}=f^{\frac{1}{4}}(\mu)\xi^{\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{1}{6}} \tag{5.2.11}$$

$$\lambda\int_{\mu}^{x}q_1(\tau)d\tau=\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}} \tag{5.2.12}$$

所以 $x>\mu$ 时

$$\begin{aligned}y&\sim\frac{1}{\sqrt[4]{q_1(x)}}[a_1\sin\lambda\int_{\mu}^{x}\sqrt{q_1(\tau)}d\tau+b_1\cos\lambda\int_{\mu}^{x}\sqrt{q_1(\tau)}d\tau]\\&=\frac{\lambda^{\frac{1}{6}}}{f^{\frac{1}{4}}\xi^{\frac{1}{4}}}[\widetilde{a_1}\sin(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4})\\&\quad+\widetilde{b_1}\cos(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}\xi^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4})]\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

式中

$$\begin{aligned}a_1&=\frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{a}_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{b}_1\\b_1&=\frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{a}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\widetilde{b}_1\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

当 $x<\mu$ 时

$$y\sim\frac{\lambda^{\frac{1}{6}}}{f^{\frac{1}{4}}|\xi|^{\frac{1}{4}}}[a_2\exp(-\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}|\xi|^{\frac{3}{2}}+b_2\exp(\frac{2}{3}\sqrt{f(\mu)}|\xi|^{\frac{3}{2}})] \tag{5.2.15}$$

因此，为了达到匹配的目的，系数之间必有下述关系：

$$(\widetilde{a}_1,\widetilde{b}_1)=\frac{f^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{6}}}(a_3,b_3) \tag{5.2.16}$$

$$(a_2,b_2)=\frac{f^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{6}}}(\frac{1}{2}a_3,b_3) \tag{5.2.17}$$

我们要将转向点两侧解的系数联系起来，这叫连接公式：

$$(a_2, b_2) = (\frac{1}{2}\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1) \tag{5.2.18}$$

其规则是，首先是将解表达式 (5.2.13) 的形式. 那么，负指数幂项的系数为正弦项系数之半，正指数幂项的系数与余弦项的系数相等.

[**例 5.2.1**]　势垒问题，解 Schrödinger 方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U(x)]\phi = 0 \tag{5.2.19}$$

这里，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 是 Plank 常量，$U(x)$ 为势垒的能量，E 为粒子的能量.

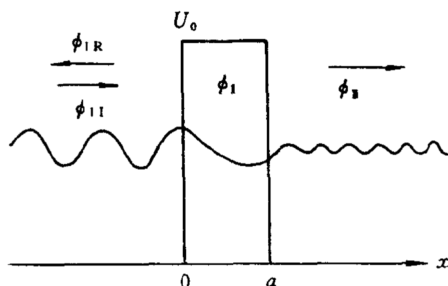


图 5.2.1　势垒贯穿

在 $E > U(x)$ 之 I，III 区域

$$\phi(x) \sim \frac{1}{[k(x)]^{\frac{1}{2}}} \exp[\pm i \int^x k(\tau)d\tau] \tag{5.2.20}$$

式中

$$k^2(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - U(x)] \tag{5.2.21}$$

在 $E < U(x)$ 之区域 II

$$\phi(x) \sim \frac{1}{[k'(x)]^{\frac{1}{2}}} \exp[\pm \int^{x} k'(\tau) d\tau] \tag{5.2.22}$$

式中

$$k'^2(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2}[U(x) - E] \tag{5.2.23}$$

现在考虑一束波从 I 区穿过 II 区达到 III 区，那么在 I，II 区，由于界面的反射，都有两个方向的波存在，在 III 区只有右行的透射波，故

$$\phi_{\text{III}} \sim \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp[i(\int_b^x k(\tau) d\tau + \frac{\pi}{4})] \tag{5.2.24}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{k(x)}}[\cos(\int_b^x k(\tau) d\tau + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\int_b^x k(\tau) + \frac{\pi}{4})]$$

由连接公式

$$\phi_{\text{II}} \sim \frac{A}{\sqrt{k'(x)}}[\exp(\int_x^b k'(\tau) d\tau) + \frac{i}{2}\exp(-\int_x^b k'(\tau) d\tau)] \tag{5.2.25}$$

为了在 a 点附近用连接公式，将积分限取在 a 点

$$\phi_{\text{II}} \sim \frac{A}{\sqrt{k'(x)}}[\exp(\int_a^b k'(\tau) d\tau) \exp(-\int_a^x k'(\tau) d\tau) \tag{5.2.26}$$

$$+\frac{i}{2}\exp(-\int_a^b k'(\tau) d\tau) \exp(\int_a^x k'(\tau) d\tau)]$$

再次用连接公式

$$\phi_{\text{I}} \sim \frac{A}{\sqrt{k(x)}}[2\exp(\int_a^b k'(\tau) d\tau) \sin(\int_x^a k(\tau) d\tau + \frac{\pi}{4}) \tag{5.2.27}$$

$$+\frac{i}{2}\exp(-\int_a^b k'(\tau) d\tau) \cdot \cos(\int_x^a k(\tau) d\tau + \frac{\pi}{4})]$$

上式进一步化成:

$$\phi_{\mathrm{I}} \sim \frac{A\,i}{\sqrt{k(x)}}\{[\frac{1}{4}\exp(-\int_a^b k'(\tau)d\tau \tag{5.2.28}$$

$$-\exp\int_a^b k'(\tau)d\tau]\exp i(\frac{\pi}{4}-\int_x^a k(\tau)d\tau)$$

$$+[\frac{1}{4}\exp(-\int_a^b k'(\tau)d\tau)+\exp\int_a^b k'(\tau)d\tau]$$

$$\cdot\exp i(\int_a^x k(\tau)d\tau-\frac{\pi}{4})\}$$

因能量与振幅的平方成正比，所以透射系数

$$D=\frac{\phi_{\mathrm{III}}^2}{\phi_{\mathrm{I}\,i}^2}=\frac{1}{[\exp\int_a^b k'(\tau)d\tau+\frac{1}{4}\exp(-\int_a^b k'(\tau)d\tau)]^2} \tag{5.2.29}$$

反射系数

$$R=\frac{\phi_{\mathrm{I}\,R}^2}{\phi_{\mathrm{I}\,i}^2}=[\frac{1-\frac{1}{4}\exp(-2\int_a^b k'(\tau)d\tau}{1+\frac{1}{4}\exp(-2\int_a^b k'(\tau)d\tau}]^2 \tag{5.2.30}$$

容易证明

$$R+D=1$$

由于指数项中含有 $\hbar$ 的大参数因子，因此，对上面的表达式 (5.2.29) (5.2.30) 还可以作近似

$$D\approx\exp[-2\int_a^b k'(\tau)d\tau]=\exp[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2\mu(U(\tau)-E)}d\tau] \tag{5.2.31}$$

以及

$$R = 1 - \exp[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2\mu(U(\tau)-E)}d\tau] \tag{5.2.32}$$

匹配法固然比较直观，但在不同的区域．解有不同的表达形式，这是不方便的地方，所以我们要用 Langer 变换来得到在整个区域一致有效的渐近解.

2. Langer 变换，仿照 Green–Liouville 变换，令

$$z = \varphi(x) \tag{5.2.33}$$

$$v = \psi(x)y \tag{5.2.34}$$

并同样要求一阶导数系数为零

$$\varphi' = \psi^2 \tag{5.2.35}$$

但第二个要求不同于 Green-Liouville 变换，而要满足

$$\frac{q_1}{\varphi'^2} = \varphi(x) = z \tag{5.2.36}$$

由此可解出 $\varphi(x)$ 为

$$\frac{2}{3}\varphi^{\frac{3}{2}} = \int_\mu^x \sqrt{(\tau-\mu)f(\tau)}\,, \quad x > \mu \ \ (\varphi > 0) \tag{5.2.37}$$

$$\frac{2}{3}(-\varphi)^{\frac{3}{2}} = \int_x^\mu \sqrt{(\mu-\tau)f(\tau)}\,, \quad x < \mu \ \ (\varphi < 0) \tag{5.2.38}$$

这时

$$\psi = \varphi'^{\frac{1}{2}} = (\frac{q_1}{\varphi})^{\frac{1}{4}} \tag{5.2.39}$$

在 Langer 变换下，原方程变换为 Airy 方程

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 zv = 0 \tag{5.2.40}$$

它的解为

$$v \sim c_1 Ai(-\lambda^{\frac{2}{3}} z) + c_2 Bi(-\lambda^{\frac{2}{3}} z) \tag{5.2.41}$$

因此

$$y \sim (\frac{\varphi}{q_1})^{\frac{1}{4}} [c_1 Ai(-\lambda^{\frac{2}{3}} z) + c_2 Bi(-\lambda^{\frac{2}{3}} z)] \tag{5.2.42}$$

解 (5.2.42) 与转向点附近的解 (5.2.7) 有区别.

(1) 自变量不同. 在转向点附近以 $z = -\xi \sqrt[3]{f(\mu)}$ 为自变量, 一致有效渐近解以 $\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi(x)$ 为自变量. 当 $x \to \mu$ 时, 由 (5.2.37)(5.2.38)

$$\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi \sim \lambda^{\frac{2}{3}}(x-\mu)\sqrt[3]{f(\mu)} = \xi \sqrt[3]{f(\mu)}$$

两者一致, 这就保证了它与内解相同.

(2) 幅度不同. 在转向点附近 φ 与 q_1 均有一阶零点, 保持常数. 远离转向点时, (5.2.42) 的渐近形式会出现 $\varphi^{-\frac{1}{4}}$ 中 $\varphi^{\frac{1}{4}}$ 相抵消, 仍然保留 $(q_1)^{-\frac{1}{4}}$ 因子, 这样就保证了解 (5.2.42) 与外解相同.

因此, 得 (5.2.42) 是在包括转向点在内的整个区域中一致有效的.

[**例 5.2.2**] 考察本征值问题

$$y'' + \lambda^2(1 - x^3)y = 0 \tag{5.2.43}$$

$$y(0) = 0 \tag{5.2.44}$$

显然, 该问题包含着转向点 $x = 1$ 在内, 我们不能直接使用 WKB 解 (5.1.9), (5.1.10), 作变换

$$(x^3 - 1) = \varphi'^2\varphi \tag{5.2.45}$$

方程 (5.2.43) 化成

$$y'' - \lambda^2 zy = 0 \tag{5.2.46}$$

考虑到 ∞ 处趋于零的要求, 它的解为

$$y \sim c(\frac{z}{x^3 - 1})^{\frac{1}{4}} Ai(\lambda^{\frac{2}{3}} z) \tag{5.2.47}$$

现在要求 $y(0)=0$. 这时按 (5.2.38), 相应于原点之 z_0 为

$$\frac{2}{3}(-z_0)^{\frac{3}{2}} = \int_0^1 \sqrt{1-\tau^3}d\tau \tag{5.2.48}$$

即要求

$$Ai[-\lambda^{\frac{2}{3}}(\frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{1-\tau^3}d\tau)^{\frac{2}{3}}] = 0 \tag{5.2.49}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时，自变量趋于 $-\infty$, 由渐近展开可知

$$\sin[\lambda \int_0^1 \sqrt{1-\tau^3}d\tau + \frac{\pi}{4}] = 0$$

所以

$$\lambda_n = \frac{(n-\frac{1}{4})\pi}{\int_0^1 \sqrt{1-\tau^3}d\tau} \tag{5.2.50}$$

计算结果如表所列.

表 5.2.1 方程 (5.2.43) 的特征值

n	1	2	3	4
WKB 法	2.892	6.535	10.27	14.00
数值计算法	2.807	6.540	10.27	14.00

现在，我们要简单讨论一下有两个转向点的情况，即

$$q_1(x) = (x-\mu_1)(\mu_2-x)f(x)\ , \quad \mu_2 > \mu_1 \tag{5.2.51}$$

不妨假定 $f(x) > 0$.

在 $x=\mu_1$ 附近，采用单个转向点的结果.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1'(x)}}\{a_1 Ai[-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi_1(x)] + b_1 Bi[-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi_1(x)]\} \tag{5.2.52}$$

其中

$$\frac{2}{3}\varphi_1^{\frac{3}{2}} = \int_{\mu_1}^{x} \sqrt{(\tau-\mu_1)(\mu_2-\tau)f(\tau)}d\tau\ ,\quad x > \mu_1 \tag{5.2.53}$$

$$\frac{2}{3}(-\varphi_1)^{\frac{3}{2}} = \int_{x}^{\mu_1} \sqrt{(\mu_1-\tau)(\mu_2-\tau)f(\tau)}d\tau \quad x < \mu_1 \tag{5.2.54}$$

同样地，在 $x=\mu_2$ 附近，有类似的结果

$$y \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi_2'(x)}}\{a_2 Ai[-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi_2(x)] + b_2 Bi[-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi_2(x)]\} \tag{5.2.55}$$

其中

$$\frac{2}{3}\varphi_2^{\frac{3}{2}} = \int_{x}^{\mu_2} \sqrt{(\tau-\mu_1)(\mu_2-\tau)f(\tau)}d\tau\ ,\quad x < \mu_2 \tag{5.2.56}$$

$$\frac{2}{3}(-\varphi_2)^{\frac{3}{2}} = \int_{\mu_2}^{x} \sqrt{(\mu_1-\tau)(\mu_2-\tau)f(\tau)}d\tau\ ,\quad x > \mu_2 \tag{5.2.57}$$

在 $x=\pm\infty$ 处， y 应有界，所以

$$b_1 = b_2 = 0 \tag{5.2.58}$$

在 $\mu_1 < x < \mu_2$ 间， y 应该有相同的渐近表达式，即由 (5.2.52) 可得

$$y \sim \frac{a_1\lambda^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi}[(x-\mu_1)(\mu_2-x)f(x)]^{\frac{1}{4}}}\sin[\frac{2}{3}\lambda\varphi_1^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}] \tag{5.2.59}$$

由 (5.2.56) 再得

$$y \sim \frac{a_2\lambda^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi}[(x-\mu_1)(\mu_2-x)f(x)]^{\frac{1}{4}}}\sin[\frac{2}{3}\lambda\varphi_2^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}] \tag{5.2.60}$$

所以，应有

$$a_1 = a_2 \tag{5.2.61}$$

以及

$$\frac{2}{3}\lambda_n(\varphi_1^{\frac{3}{2}}+\varphi_2^{\frac{3}{2}})+\frac{\pi}{2}=(n+1)\pi \tag{5.2.62}$$

由式 (5.2.53), (5.2.56) 可见

$$\lambda_n=\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}(\tau-\mu_1)(\mu_2-\tau)f(\tau)d\tau}\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{5.2.63}$$

在量子力学中，可用此公式导出 Bohr-Sommerfeld 量子化条件.

[**例 5.2.3**] 势阱问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{2\mu}{\bar{h}^2}[E-U(x)]\phi=0 \tag{5.2.64}$$

这也是有两个转向点的问题，根据公式 (5.2.53), (5.2.56), (5.2.62) 得

$$\frac{1}{\bar{h}}\int\limits_a^b\sqrt{2\mu[E-U(\tau)]}d\tau=(n+\frac{1}{2})\pi \tag{5.2.65}$$

所以

$$2\int\limits_a^b\sqrt{2\mu(E-U(\tau)]}d\tau=(n+\frac{1}{2})h \tag{5.2.66}$$

由 de Bloglie 公式， p 为广义动量

$$p=kh=\sqrt{2\mu[E-U(x)]} \tag{5.2.67}$$

将 τ 看作广义坐标 q, 公式 (5.2.66) 可写成

$$\oint pdq=(n+\frac{1}{2})h \tag{5.2.68}$$

这与 Bohr-Sommerfeld 量子化条件相差一常数 $\frac{1}{2}h$.

对于线性谐振子

$$U=\frac{\mu}{2}\omega^2x^2 \tag{5.2.69}$$

两个转向点为 $\pm\sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}}$, 条件 (5.2.66) 要求

$$2\int_{-\sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}}}\sqrt{2\mu(E-\frac{\mu}{2}\omega^2\tau^2)}d\tau=(n+\frac{1}{2}$$

因积分值为 $\pi E/\omega$, 我们得到熟知的结果:

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\omega\hbar \tag{5.2.70}$$

5.3 几何光学近似

对于波动方程

$$v_{tt}-c^2\nabla^2 v=0 \tag{5.3.1}$$

我们求如下形式的解

$$v=e^{-i\omega t}u$$

可以得到约化波动方程 (reduced wave equation)

$$\nabla^2 u+k^2n^2u=0 \tag{5.3.2}$$

这里， k 为入射波的波数.

$$k=\frac{\omega}{c_0} \tag{5.3.3}$$

n 为折射指数

$$n=\frac{c_0}{c} \tag{5.3.4}$$

在短波近似下，$k\gg1$, 这也是含有大参数的方程, 仿照指数近似法, 可令

$$u(x)\sim e^{iks(x)}[\sum_{m=0}^{\infty}z_m(x)(ik)^{-m}] \tag{5.3.5}$$

这里 $s(x)$ 为光程函数

$$z(x,k)=\sum_{m=0}^{\infty} z_m(x)(ik)^{-m} \tag{5.3.6}$$

为波幅，代入约化波动方程．因

$$\nabla u \sim e^{iks(x)}[ik(\nabla s)z+\nabla z]$$

$$\Delta u \sim e^{iks(x)}[-k^2(\nabla s)^2 z+2ik\nabla s\cdot\nabla z+ik\Delta s z+\Delta z]$$

得到递推方程

$$(\nabla s)^2=n^2 \tag{5.3.7}$$

$$2\nabla s\cdot\nabla z_m+z_m\Delta s=-\Delta z_{m-1}\ ,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{5.3.8}$$

这里，(5.3.7) 叫程函方程 (eikonal equation), (5.3.8) 称为振幅的输运方程 (transport equation), 这里假定 $z_{-1}\equiv 0$.

原先我们要解三维空间的二阶线性方程，现在转化为一阶非线性方程 (5.3.7), 线性方程 (5.3.8). 由一阶偏微分方程的一般理论．可以进一步化成常微分方程．从而使问题得到了简化．

对于一阶偏微分方程

$$F(x_i,s,p_i)=0 \tag{5.3.9}$$

式中

$$p_i=\frac{\partial s}{\partial x_i} \tag{5.3.10}$$

它的特征方程为

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}}=\frac{dp_i}{-F_{x_i}-p_iF_s}=\frac{ds}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_jF_{p_j}} \tag{5.3.11}$$

对于程函方程 (5.3.7) 可得

$$\frac{dx_i}{2p_i}=\frac{dp_i}{2nn_{x_1}}=\frac{ds}{2n^2}=\frac{1}{2}\lambda(\sigma)d\sigma \tag{5.3.12}$$

这里 $\lambda(\sigma)$ 为比例常数, σ 是参数, 于是

$$\frac{d\sigma}{d\sigma}=\lambda\nabla s=\lambda \boldsymbol{p} \tag{5.3.13}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\sigma}=\frac{\lambda}{2}\nabla n^2 \tag{5.3.14}$$

$$\frac{ds}{d\sigma}=\lambda n^2 \tag{5.3.15}$$

由 (5.3.13), (5.3.14) 得

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\sigma}[\frac{1}{\lambda}(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma})]=\frac{1}{2}\nabla n^2 \tag{5.3.16}$$

按照 (5.3.15)

$$s=s_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda n^2 a\sigma \tag{5.3.17}$$

要是取 σ 为弧长参数

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\right|=1 \tag{5.3.18}$$

我们有

$$\lambda|\nabla s|=\lambda n=1 \tag{5.3.19}$$

方程可简化为

$$\frac{d}{d\sigma}(n\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma})=\nabla n \tag{5.3.20}$$

$$s=s_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma}nd\sigma \tag{5.3.21}$$

因为 $v=ze^{ik(s-c_0t)}$, $s(\boldsymbol{x})$ =const 是波阵面, 波是沿垂直于波阵面法线的弧长增加方向传播的.

我们从方程 (5.3.20) 可以求出光线的方程, 并且沿光线积分, 得到光程函数 $s=s(\sigma)$. 这个方程也可由 Fermat 原理导出, Fermat

原理要求沿着光线真实路径传播所需时间最短，即下列泛函

$$I = \int_P^Q \frac{|dr|}{c} \tag{5.3.22}$$

取极值，或

$$\delta J = 0 \tag{5.3.23}$$

其中

$$J = \int_P^Q n\sqrt{(\frac{dx_1}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_2}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_3}{d\sigma})^2} d\sigma$$

由 Euler 方程得

$$\frac{d}{d\sigma}[n\frac{\frac{dx_i}{d\sigma}}{\sqrt{(\frac{dx_1}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_2}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_3}{d\sigma})^2}}] - \\ - \sqrt{(\frac{dx_1}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_2}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_3}{d\sigma})^2}\frac{\partial n}{\partial x_i} = 0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{5.3.24}$$

这里因为

$$\sqrt{(\frac{dx_1}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_2}{d\sigma})^2 + (\frac{dx_3}{d\sigma})^2} = |\frac{dr}{d\sigma}| = \lambda n \tag{5.3.25}$$

它也就是方程

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\sigma}[\frac{1}{\lambda}\frac{dr}{d\sigma}] = \frac{1}{2}\nabla n^2 \tag{5.3.26}$$

所以，程函方程是符合 Fermat 原理的.

根据这一点，我们往往不必求解方程 (5.3.26) 就能知道路径. 譬如，在均匀介质中以直线传播，在界面上入射角等于反射角，以及折射的 Snell 定律等等.

现在讨论输运方程. 因为从 (5.3.13) 可知，射线与 ∇s 方向一致. 所以可将它化成沿着光线的常微分方程. (5.3.8) 成为

$$\frac{2}{\lambda}\frac{dz_m}{d\sigma} + z_m\Delta s = -\Delta z_{m-1} \tag{5.3.27}$$

取射线坐标系 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, σ_1 为光线方向，σ_2, σ_3 在 $s=$ const 曲面内，构成正交系．定义 Jacobi 行列式

$$
\begin{aligned}
J = \det(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_j}) &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_1}(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_2} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \sigma_3}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu} \mathrm{cof}(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu}) \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
\tag{5.3.28}
$$

式中 $\mathrm{cof}(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu})$ 代表行列式中该元的代数余因子，那么

$$
\frac{\partial J}{\partial \sigma_1} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_\nu} \mathrm{cof}(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu})
$$

利用程函方程 (5.3.13) 可得

$$
\frac{\partial J}{\partial \sigma_1} = J \nabla \cdot (\lambda \nabla s) \tag{5.3.29}
$$

展开括号得

$$
\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_1} = \nabla \lambda \cdot \nabla s + \lambda \Delta s
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lambda \Delta s &= -\nabla \lambda \cdot \nabla s + \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_1} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_1} + \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_1} \\
&= \frac{d}{d\sigma_1} \ln |\frac{J}{\lambda}|
\end{aligned}
$$

方程 (5.3.27) 成为

$$
\frac{dz_m}{d\sigma} + \frac{z_m}{2} \frac{d}{d\sigma} \ln |\frac{J}{\lambda}| = -\frac{\lambda}{2} \Delta z_{m-1} \tag{5.3.30}
$$

它的解为

$$
\begin{aligned}
z_m(\sigma) = &\; z_m(\sigma_0) \sqrt{\frac{J(\sigma_0)\lambda(\sigma)}{\lambda(\sigma_0)J(\sigma)}} \\
&- \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(\sigma') \Delta z_{m-1}(\sigma') \sqrt{|\frac{J(\sigma')\lambda(\sigma)}{\lambda(\sigma')J(\sigma)}|} d\sigma'
\end{aligned}
\tag{5.3.31}
$$

这里还要补充说明一下 J 的几何意义. 在射线坐标系中体积元

$$dV = |Jd\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3| = d\sigma_1 dA$$

因 $\lambda n = 1$, 所以

$$|Jd\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3| = \lambda n d\sigma_1 dA$$

也就是说

$$|\frac{J}{\lambda}| = \frac{ndA}{d\sigma_2 d\sigma_3}$$

在射线管内 $d\sigma_2 d\sigma_3 = \text{const}$, 所以

$$\frac{J}{\lambda} \propto ndA \tag{5.3.32}$$

振幅 z_m 就可表达为

$$z_m(\sigma) = z_m(\sigma_0)\sqrt{\frac{n(\sigma_0)dA(\sigma_0)}{n(\sigma)dA(\sigma)}} \tag{5.3.33}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(\sigma')\Delta z_{m-1}(\sigma')\sqrt{\frac{n(\sigma')dA(\sigma')}{n(\sigma)dA(\sigma)}}d\sigma'$$

尤其是对 $m = 0, z_{-1} = 0$, 我们有

$$z_0^2(\sigma)n(\sigma)dA(\sigma) = z_0^2(\sigma_0)n(\sigma_0)dA(\sigma_0) \tag{5.3.34}$$

它的物理意义是能流守恒. 从该式也可看出, 在 $dA = 0$ 的点, 即射线的交点或包络线 (我们称为焦散线), 振幅为无穷. 这时几何光学近似就失效了, 必须另行处理.

为了讨论点光源, 线光源的情况, 我们要应用 Hadamard 提出的有限部分的概念 (附录五), 在点光源附近, 我们有

$$z_m(\sigma) = \frac{z_m(\sigma_0+\varepsilon)\sqrt{J(\sigma_0+\varepsilon)/\lambda(\sigma_0+\varepsilon)}}{\sqrt{J(\sigma)/\lambda(\sigma)}} \tag{5.3.35}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\sigma_0^+}^{\sigma} \lambda(\sigma')\Delta z_{m-1}(\sigma')\sqrt{\frac{J(\sigma')/\lambda(\sigma')}{J(\sigma)/\lambda(\sigma)}}d\sigma'$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z_m(\sigma_0+\varepsilon)\sqrt{J(\sigma_0+\varepsilon)/\lambda(\sigma_0+\varepsilon)} = \zeta_m \tag{5.3.36}$$

上述公式 (5.3.35) 就成为

$$z_m(\sigma) = \frac{\zeta_m}{\sqrt{J(\sigma)/\lambda(\sigma)}} - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(\sigma')\Delta z_{m-1}(\sigma')\sqrt{\frac{J(\sigma')\lambda(\sigma)}{J(\sigma)\lambda(\sigma')}}d\sigma' \tag{5.3.37}$$

类似地，相应于公式 (5.3.33), 我们有

$$z_m(\sigma) = \frac{\zeta_m^{\circ}}{\sqrt{n(\sigma)dA(\sigma)}} - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(\sigma')\Delta z_{m-1}(\sigma')\sqrt{\frac{n(\sigma')dA(\sigma')}{n(\sigma)dA(\sigma)}}d\sigma' \tag{5.3.38}$$

式中

$$\zeta_m^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} z_m(\sigma_0+\varepsilon)\sqrt{n(\sigma_0+\varepsilon)dA(\sigma_0+\varepsilon)} \tag{5.3.39}$$

[**例 5.3.1**]　均匀直线源引起的柱面波，两维点源附近振幅形态为

$$\zeta_0(\theta)\sqrt{r} \tag{5.3.40}$$

因此，给出了输运方程的初始条件

$$\zeta_0 = \zeta_0(\theta)\ , \qquad \zeta_m = 0 \tag{5.3.41}$$

现在可以求 z_m

$$z_m = \frac{\zeta_m}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2n}\int_0^r \sqrt{\frac{r'}{r}}\Delta z_{m-1}dr' \tag{5.3.42}$$

这里

$$z_0 = \frac{\zeta_0(\theta)}{\sqrt{r}} \tag{5.3.43}$$

由于

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial^2 \theta}$$

逐次计算 $z_1, z_2, \cdots$ 可以证明

$$z_m(r,\theta) = (\frac{1}{2n})^m \frac{r^{-m-\frac{1}{2}}}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} [(j+\frac{1}{2})^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}]\zeta_0(\theta)$$

尤其是当 $\delta_0(\theta) = e^{il\theta}$

$$z_m(r,\theta) = (\frac{1}{2n})^m \frac{r^{-m-\frac{1}{2}}}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} [(j+\frac{1}{2})^2 - l^2] e^{il\theta} \tag{5.3.44}$$

相函数 $s = nr$, 故而

$$u \sim e^{iks} \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^{-m} z_m \tag{5.3.45}$$

$$= e^{iknr} \frac{e^{il\theta}}{\sqrt{r}} \{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{-m}}{(2ink)^m} \frac{1}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} [(j+\frac{1}{2})^2 - l^2]\}$$

我们知道 Hankel 函数有如下渐近展开:

$$H_l^{(1)}(knr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi knr}} e^{i(knr - \frac{\pi}{2}l - \frac{\pi}{4})} \times \{1$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2inkr)^m} \frac{1}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} [(j+\frac{1}{2})^2 - l^2]\}, \quad nkr \gg 1$$

若令 $\zeta_0(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi kn}} e^{-i(\frac{\pi}{2}l + \frac{\pi}{4})} \cdot e^{il\theta}$, 那么

$$u \sim H_l^{(1)}(knr) e^{il\theta}, \quad knr \gg 1 \tag{5.3.46}$$

实际上, (5.3.46) 右端就是约化波动方程的准确解.

5.4 焦散线附近的一致有效渐近解

现在讨论在焦散线附近的处理方法，它可以由匹配方法获得解，但我们要介绍 Ludwig & Kravtsov(1967) 的一致有效渐近解理论，其关键是猜测解的适当形式.

首先来看均匀介质的情况. 约化波动方程的解可由平面波叠加而得

$$u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int \varphi(\eta) e^{ik\psi(\eta,\boldsymbol{x})} d\eta \tag{5.4.1}$$

ψ 沿着焦散线 $x = \xi(\eta)$ 切线方向 $t(\eta)$ 传播的平面波

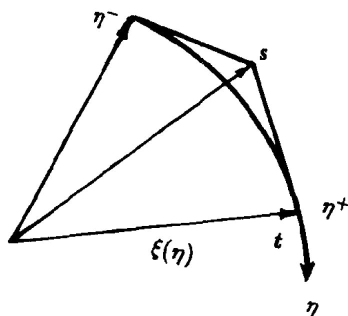


图 5.4.1 焦散曲线附近的一致有效渐近解

$$\psi(\eta, \boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\eta)] \cdot \boldsymbol{t}(\eta) + \eta \tag{5.4.2}$$

上述积分在驻相点贡献最大. 由于

$$\psi_\eta = K\left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\eta)\right] \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\psi_{\eta\eta} = K_\eta\left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\eta)\right] \cdot \boldsymbol{n} - K^2\left[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\eta)\right] \cdot \boldsymbol{t}$$

这里 K 为焦散线曲率. 所以，在驻相点

$$[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\eta)] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{5.4.3}$$

也就是说，由 x 作焦散线的切线所得的两点，$\xi(\eta^{\pm})$ 处为驻相点. 在那里

$$\psi = \eta^{\pm} + \sigma^{\pm} \tag{5.4.4}$$

此时,

$$\psi_{\eta\eta} = -K^2\sigma \tag{5.4.5}$$

由驻相法公式，可得

$$u \sim Z_o^+ e^{iks^+} + Z_o^- e^{iks^-} \tag{5.4.6}$$

这里

$$s^{\pm} = \eta^{\pm} + \sigma^{\pm} \tag{5.4.7}$$

$$Z^{\pm} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} k^{-\frac{1}{2}} \varphi(\eta^{\pm})/K\,|\sigma|^{\frac{1}{2}} \tag{5.4.8}$$

从图 5.4.1 可见, $\sigma^+ < 0$, $\sigma^- > 0$, 故而 $\psi_{\eta\eta}(\eta^+) > 0$ $\psi_{\eta\eta}(\eta^-) < 0$, 相应的相移为 $e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$. 当 x 接近焦散线时， $\sigma \to 0$, 因此 $\psi_{\eta\eta} \to 0$, 所以, 积分主要部分应与 Airy 函数相仿. 这样，便可用 Airy 函数来表示一致有效渐近解 (参见第三章，先导波的有关内容).Ludwig & Kravtsov 假定

$$u(\boldsymbol{x}) = e^{ik\theta(\boldsymbol{x})}\left\{Ai(-k^{\frac{3}{2}}\rho(\boldsymbol{x}))g(\boldsymbol{x},k) + ik^{-\frac{1}{3}}Ai'(-k^{\frac{2}{3}}\rho(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x},k)\right\} \tag{5.4.9}$$

式中

$$g(\boldsymbol{x},k) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^{-m}g_m(\boldsymbol{x}) \tag{5.4.10}$$

$$h(\boldsymbol{x},k) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^{-m}h_m(\boldsymbol{x}) \tag{5.4.11}$$

由 Airy 函数的性质，得递推方程

$$(\nabla\theta)^2+\rho(\nabla\rho)^2=n^2 \tag{5.4.12}$$

$$\nabla\theta\cdot\nabla\rho=O \tag{5.4.13}$$

$$2\nabla\theta\cdot\nabla g_o+(\Delta\theta)g_o+2\rho\nabla\rho\cdot\nabla h_o+\rho(\Delta\rho)h_o+(\nabla\rho)^2h_o=0 \tag{5.4.14}$$

$$2\nabla\rho\cdot\nabla g_o+(\Delta\rho)g_o+2\nabla\theta\cdot\nabla h_o+(\Delta\theta)h_o=0 \tag{5.4.15}$$

在远离焦散面， $z=k^{2/3}\ \ \rho\to\infty$, 由 $Ai(-z),Ai'(-z)$ 的渐近展开，得

$$u\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{1/6}}\left\{H^+(\boldsymbol{x})e^{iks^+}+H^-(\boldsymbol{x})e^{iks^-}\right\} \tag{5.4.16}$$

式中

$$S^{\pm}=\theta\pm\frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{2}} \tag{5.4.17}$$

$$H^{\pm}=e^{\mp i\frac{\pi}{4}}(\rho^{-\frac{1}{4}}g_o\pm\rho^{\frac{1}{4}}h_o) \tag{5.4.18}$$

我们假定在焦散线附近， (5.4.17), (5.4.18) 依然成立．即定义

$$\theta=\frac{1}{2}(S^++S^-) \tag{5.4.19}$$

$$\frac{2}{3}\rho^{3/2}=\frac{1}{2}(S^+-S^-) \tag{5.4.20}$$

$$g_0=\frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}(H^+e^{\frac{\pi}{4}i}+H^-e^{-\frac{\pi}{4}i}) \tag{5.4.21}$$

$$h_0=\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{4}}(H^+e^{\frac{\pi}{4}i}-H^-e^{-\frac{\pi}{4}i}) \tag{5.4.22}$$

在焦散线附近的解应为 (5.4.9).

由 (5.4.12) 式 $\pm2\sqrt{\rho}\times$(5.4.13) 式得

$$(\nabla S^{\pm})^2=n^2 \tag{5.4.23}$$

由 (5.4.14) 式 $\pm\sqrt{\rho}\times$(5.4.15) 式得

$$2\nabla H^{\pm}\cdot\nabla S^{\pm}+H^{\pm}\Delta S^{\pm}=0 \tag{5.4.24}$$

(5.4.23) (5.4.24) 就是程函方程以及输运方程. 在焦散曲面上 $\rho=0$, 由于 h_0 为有限值有

$$H^{+}e^{\frac{\pi}{4}i}-H^{-}e^{-\frac{\pi}{4}i}=0 \tag{5.4.25}$$

即

$$H^{+}=H^{-}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} \tag{5.4.26}$$

这是与匹配法得到的相移法则相一致的: 即内行波与外行波幅度一致, 相位滞后 $\dfrac{\pi}{2}$.

若已知内行波振幅为 Z_0^-, 则,

$$H^{-}=2\sqrt{\pi}k^{\frac{1}{6}}Z_0^{-} \tag{5.4.27}$$

$$H^{+}=2\sqrt{\pi}k^{\frac{1}{6}}Z_0^{-}e^{-\frac{\pi}{2}i} \tag{5.4.28}$$

便可由 (5.4.9) 式得到包括焦散面在内的一致有效渐近解.

习　　题

5.1　考虑边值问题

$$\varepsilon^2y''+(x^2+2x+2)y=0\,,\qquad \varepsilon\ll 1$$

$$y(0)=0,\qquad y(1)=1$$

的近似解.

5.2　考虑初值问题

$$\varepsilon^2y''+(x+1)^4y=0\,,\qquad \varepsilon\ll 1$$

$$y(0)=0,\qquad y'(0)=1$$

的近似解.

5.3 试用 WKB 方法近似求解方程

$$\varepsilon^n \frac{d^n}{dx^n} y(x) = Q(x) y(x) \ , \qquad \varepsilon \ll 1$$

(a) 证明 n 个性独立解为

$$y_i(x) \sim [Q(x)]^{\frac{1-n}{2n}} e^{\lambda \omega_i \int_0^x [Q(\tau)]^{\frac{1}{n}} d\tau} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 ω_i 为 1 的 n 次根.

(2) 写出方程

$$\varepsilon^4 \frac{d^4}{dx^4} y(x) = x y(x)$$

通解的表达式.

5.4 用 WKB 方法求

$$xy'' + y' + \lambda^2 x(1 - x^2) y = 0 \ , \qquad \lambda \gg 1$$ 时的通解，并说明解的有效性.

5.5 求方程

$$\varepsilon y'' + (2x + 1) y' + 2y = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1$$

渐近解.

5.6 试求解下述方程

$$u''(x) + \lambda^2 (1 - x^2) f(x) u = 0$$

$$u(1) = u(-1) = 0 \qquad \lambda \gg 1$$

$f(x) > 0$, 的本征值问题.

5.7 对管道内热交换的 Graetz 问题

$$ru'' + u' + \lambda^2 r(1 - r^2) f(r) u = 0$$

$$u(1) = 0, \qquad u(0) < \infty$$

$\lambda \gg 1$, $f(r) > 0$

(a) 求远离 $r=0$, $r=1$ 的有效展开;

(b) 求靠近 $r=0$, $r=1$ 的有效展开;

(c) 求一致有效的渐近展开.

5.8 考虑问题

$$y'' + \lambda^2 (x-a)(x-b) f(x) y = 0$$

其中 $b > a$, $f(x) > 0$, 当 $x \to \pm\infty$ 时, $y \to 0$, 求其解与本征值.

5.9 用 WKB 近似求解

$$\varepsilon y'' + a(x) y' + b(x) y = 0, \qquad y(0) = A, \qquad y(1) = B$$

$a(x) > 0$, 并说明解的边界层特性.

5.10 试用数值方法求下述本征值问题的解:

$$y'' + E(\pi + x)^4 y = 0$$

$y(1) = y(\pi) = 0$ 的本征值问题, 同 WKB 近似解的值来进行比较, 说明近似解的准确程度.

第六章　流动稳定性与渐近解

在自然界，经常可以看到不同流动状态之间的转变. 疾风吹拂湖面可以掀起轩然大波；上下层的温度逆差可引起大气，海洋，地幔对流；小溪中涓涓细流可以汇成湍急的江河，一泻千里；在实验室里，Reynolds 通过控制流速，观察了流体运动从层流到湍流的过渡. 研究流体运动的状态转变是流动稳定性理论的任务. 正如 Landau 指出：并不是运动方程的每一个解 (即使是精确解) 都能够实际上在自然界中出现. 在自然界中出现的流动不仅要服从流体动力学方程，而且应该是稳定的. Tollmien 也认为：在流管中带有清晰层次的层流过渡到强烈混和的不规则的湍流是现代流体动力学的主要问题之一，层流本身总是流体动力学方程的可能解，而流体流动类型这一转化肯定要归因于层流的不稳定性.

流体运动不稳定的例子很多，如 Benard 对流，指的是在薄层流体下面加热，当 Rayleigh 数 $Ra = g\alpha\beta d^4/k\nu$ 超过临界值以后，会出现对流泡；在两个旋转同心圆筒间的流体，当 Taylor 数 $T = 4\Omega^2 L^4/\nu^2$ 超过临界值以后，会出现 Taylor 涡；液体射流在空气中的破碎；晶体的树枝状生长；两个流体界面上的指进现象；风生波和海底的沙纹都是流动不稳定的典型例子. 在本章我们仅讨论与 Navier-Stokes 方程有关的从层流到湍流的转捩，这不仅因为这个问题本身的重要性，而且，在流动稳定性理论的发展历史上，渐近分析方法起了决定性作用.

本章的安排如下：首先导出支配流动中小扰动发展的 Orr - Sommerfeld 方程 (以后称 O - S 方程)，然后分析该方程的性质，给出其渐近解，从而获得中性曲线与临界 Reynolds 数，我们亦给出了与四阶方程有关的广义 Airy 函数的定义，最后简单讨论了流动稳定性的物理机理.

6.1 平行流稳定性的 O-S 方程

现在我们来讨论流动稳定性理论中的典型问题 —— 两维平行流的稳定性理论，我们假定流体运动满足 Navier–Stokes 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+u\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6.1.1}$$

在壁面上满足

$$u=v=w=0 \tag{6.1.2}$$

对于平面 Poiseuille 流， $u=u(y)$， $v=w=0$, 方程 (6.1.1) 及边界条件 (6.1.2) 成为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{6.1.3}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{6.1.4}$$

以及边界条件

$$u(\pm 1)=0 \tag{6.1.5}$$

从而可以得到抛物型的速度分布

$$u(y)=1-y^2 \tag{6.1.6}$$

现在在定常的主流上叠加一个小扰动

$$u=u(y)+\tilde{u},\quad v=\tilde{v},\quad P=p+\tilde{p} \tag{6.1.7}$$

它依然满足方程 (6.1.1) 与边界条件 (6.1.2), 在略去高阶项后，可得扰动量的方程

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+u\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\tilde{u} \tag{6.1.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}+u\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}+\nu\nabla^2\tilde{v} \tag{6.1.9}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}=0 \tag{6.1.10}$$

这里我们并不研究三维扰动的情况，因为 Squire 已证明二维扰动的临界 Reynolds 数比三维扰动的临界 Reynolds 数要低. 引进扰动流函数 $\tilde{\psi}$, 使得

$$\tilde{u}=\tilde{\psi}_y, \qquad \tilde{v}=-\tilde{\psi}_x \tag{6.1.11}$$

以及

$$\tilde{\psi}=\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \qquad \frac{1}{\rho}\tilde{p}=\pi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \tag{6.1.12}$$

其中 α 为波数，c_r 为波速，αc_i 为扰动增长指数，代入方程 (6.1.8) (6.1.9), 得到:

$$i\alpha\left\{(v-c)\varphi'-U'\varphi\right\}=-i\alpha\pi+\nu\left\{\varphi''-\alpha^2\varphi\right\}'$$

$$\alpha^2(U-c)\varphi=-\pi'+i\alpha\nu\left\{\varphi''-\alpha^2\varphi\right\} \tag{6.1.13}$$

消去 $\pi(y)$ 可得 Orr - Sommerfeld 方程

$$(D^2-\alpha^2)^2\varphi=i\alpha R\left\{(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi\right\} \tag{6.1.14}$$

式中 $D=\frac{d}{dy}$ 是微分算子，$U=U(y)$ 是主流的速度廓线. 对于平面 Poiseuille 流，$U(y)=1-y^2$, 平行流稳定性理论也可应用于其它类型流动，如对边界层流动的稳定性，可取 $U(y)$ 为 Blasius 方程的解. 方程中的参数 α 是波数，R 是 Reynolds 数，c 是复波速，c_r =Re c 为扰动相速度，$\alpha c_i=\alpha$ Im c 是扰动增长率，显然，$c_i>0$,

流动是不稳定的，$c_i<0$ 流动是稳定的，$c_i=0$ 是中性曲线，为确定临界 Reynolds 数，必须求解上述的本征值问题，可以求出

$$\begin{aligned} c_r &= c_r(\alpha^2, \alpha R) \\ c_i &= c_i(\alpha^2, \alpha R) \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

由此确定中性曲线

$$c_i(\alpha^2, \alpha R) = 0 \tag{6.1.16}$$

及临界 Reynolds 数 Re.

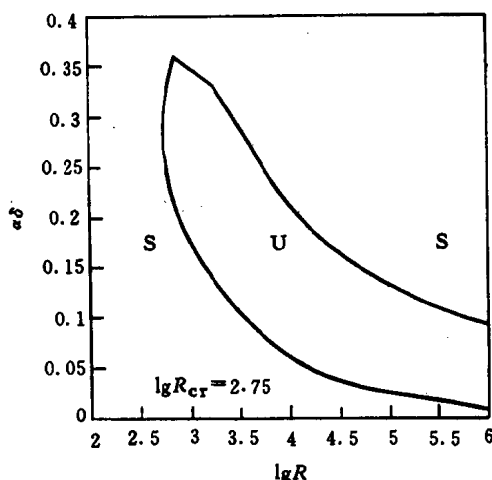


图 6.1.1　中性曲线与临界 Reynolds 数

6.2 O-S 方程的渐近解

现在我们来分析 Orr - Sommerfeld 方程

$$(D^2-\alpha^2)^2\varphi - i\alpha R\left\{(U-c)(D^2-\alpha^2)-U''\right\}\varphi = 0 \tag{6.2.1}$$

之性质. 由于转捩总发生在大 Reynolds 数的情况. 所以，我们要求 $\alpha R\to\infty$ 时的渐近解. 我们将函数 φ 展开成 $(\alpha R)^{-1}$ 的幂级数

$$\varphi = \varphi^{(o)} + \frac{1}{\alpha R}\varphi^{(1)} + \cdots \tag{6.2.2}$$

这时，就得到 Rayleigh 方程

$$(U-c)(\varphi^{(o)''}-\alpha^2\varphi^{(o)})-U''\varphi^{(o)}=0 \tag{6.2.3}$$

如果 $U-c$ 有单零点 y_c, 可以用 Frobenius 方法在 y_c 附近求 $(y-y_c)$ 的级数解，这时 $y=y_c$ 为正则奇点，其特征方程为

$$\lambda(\lambda-1)=0 \tag{6.2.4}$$

所以，特征值相差一个正整数，方程的两个线性独立解应为

$$\Phi_1^{(0)}(y)=(y-y_c)\frac{p(y-y_c)}{p(0)} \tag{6.2.5}$$

$$\Phi_2^{(0)}(y)=1+\cdots+\frac{U_c''}{U_c}\Phi_1^{(0)}(y)\ln(y-y_c) \tag{6.2.6}$$

对于小波数 α,Heisenberg 将 φ 展开成 α 的级数形式，即

$$\varphi^{(0)}(y)=(U-c)q(y)=(U-c)\left[q_0(y)+\alpha^2q_1(y)+\cdots\right] \tag{6.2.7}$$

代入方程 (6.2.3), 导出 $q(y)$ 的方程为

$$\left[(U-c)^2q'(y)\right]'-\alpha^2(U-c)^2q(y)=0 \tag{6.2.8}$$

所以

$$q_0(y)=1 \qquad 或 \qquad q_0(y)=\int\frac{dy}{(U-c)^2} \tag{6.2.9}$$

$$q_{n+1}(y)=\int(U-c)^{-2}dy\int(U-c)^2q_n(y)dy \tag{6.2.10}$$

由于 Orr–Sommerfeld 方程是四阶方程，还需要求另两个线性独立解,这时必须计及粘性影响,即把高阶项考虑在内,所以可采用 WKB 方法，令

$$\Phi(y)=e^{\sqrt{\alpha R}Q}\left[f_0(y)+(\alpha R)^{-\frac{1}{2}}f_1(y)+\cdots\right] \tag{6.2.11}$$

$$\Phi(y)=e^{-\sqrt{\alpha R}Q}\left[f_0(y)+(\alpha k)^{-\frac{1}{2}}f_1(y)+\cdots\right] \tag{6.2.12}$$

其中

$$Q(y) = \pm \int_{y_c}^{y} \sqrt{i(U-c)}dy \tag{6.2.13}$$

$$f_0(y) = (U-c)^{-\frac{5}{4}} \tag{6.2.14}$$

(6.2.5), (6.2.6), (6.2.11), (6.2.12) 分别为正则，奇异无粘解和粘性解，显然在壁面附近有边界层，其厚度为 $(\alpha R)^{-1/2}$, 无粘解在那里不适用. 同样地，在 $y = y_c$ 的转向点或临界层附近，由于 Tollmien-Schlichting 波与流体运动速度几乎相同，介质与扰动波长时间相互作用，使得粘性不可忽略，在临界层附近粘性不可忽略的区域称为内边界层，在这一层中取内变量.

$$\eta = \frac{y - y_c}{\varepsilon} \tag{6.2.15}$$

使得粘性项起作用，要求 $\varepsilon = (\alpha R)^{1/3}$, 我们将函数 $\varphi(y)$ 按 ε 之级数形式展开，即

$$\varphi(y) = x^{(0)}(\eta) + \varepsilon x^{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 x^{(2)}(\eta) + \cdots \tag{6.2.16}$$

考虑到

$$(U-c) = U_c'\varepsilon\eta + \frac{1}{2}U_c''(\varepsilon\eta)^2 + \cdots$$
$$U'' = U_c'' + U_c'''\varepsilon\eta + \cdots$$

可以导出如下递推方程

$$U_c'\eta x^{(0)''} + ix^{(0)''''} = 0 \tag{6.2.17}$$

$$U_c'\eta x^{(n)''} + ix^{(n)''''} = L_{n-1}(x) \tag{6.2.18}$$

$L_{n-1}(x)$ 为 $x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}$ 组成的非齐次项，上述方程相当于 Airy 方程或 1/3 阶 Bessel 方程，其解为

$$x_1^{(0)} = \eta \tag{6.2.19}$$

$$x_2^{(0)} = 1 \tag{6.2.20}$$

$$x_3^{(0)} = \int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{6.2.21}$$

$$x_4^{(0)} = \int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left[\frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{6.2.22}$$

$\alpha_0 = (U_c')^{1/3}$, 不难求 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ 的表达式. 当 $\eta \to \infty$ 时应与外解 (6.2.5), (6.2.6), (6.2.11), (6.2.12) 相匹配, 显然

$$x_1^{(0)} + \varepsilon x_1^{(1)} + \cdots = \eta + \cdots \sim \frac{1}{U_c'\varepsilon}\left[U_c' y + \cdots\right] \tag{6.2.23}$$

$$x_2^{(0)} + \varepsilon x_2^{(1)} + \cdots = 1 + \varepsilon \frac{U_c''}{U_c'} \eta \ln \eta \sim 1 + \frac{U_c''}{U_c'}(y - y_c)\ln(y - y_c) \tag{6.2.24}$$

对于 $x_3^{(o)}$, $x_4^{(0)}$ 要用 Airy 函数或 1/3 阶 Bessel 函数的渐近展开

$$H_{1/3}^{(1)}(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left[i\left(\xi - \frac{5\pi}{12}\right)\right]\left\{1 + \sum_{r=1}^\infty \frac{(-1)^r c_r^{1/3}}{(2i\xi)^r}\right\}$$

$$-\pi < \operatorname{Arg}\xi < 2\pi \tag{6.2.25}$$

$$H_{1/3}^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left[-i\left(\xi - \frac{5}{12}\pi\right)\right]\left\{1 + \sum_{r=1}^\infty \frac{(-1)^r c_r^{1/3}}{(2i\xi)^r}\right\}$$

$$-2\pi < \operatorname{Arg}\xi < \pi \tag{6.2.26}$$

这里取 $\xi = \frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}}$, 将渐近代入 $x_3^{(0)}$, $x_4^{(0)}$ 可得

$$x_3^{(0)} \sim \text{const} \cdot \eta^{-\frac{5}{4}} \exp\left\{\frac{2}{3}(\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{5\pi}{4}i}\right\} \tag{6.2.27}$$

$$x_4^{(0)} \sim \text{const} \cdot \eta^{-\frac{5}{4}} \exp\left\{\frac{2}{3}(\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}\right\} \tag{6.2.28}$$

指数中 $e^{\frac{5\pi}{4}i}$, $e^{\frac{\pi}{4}i}$ 由 ξ 变量代入可得, 由分部积分可估计主项为 $O(\eta^{-\frac{5}{4}})$, 辐角范围对 $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\xi)$ 要求

$$-\pi < \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\operatorname{Arg}\eta < 2\pi \tag{6.2.29}$$

$H^{(2)}_{1/3}(\xi)$ 要求

$$-2\pi < \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}\operatorname{Arg}\eta < \pi \tag{6.2.30}$$

其公共范围为

$$-\frac{7}{6}\pi < \operatorname{Arg}\eta < \frac{\pi}{6} \tag{6.2.31}$$

说明 $x_0^{(3)}, x_0^{(4)}$ 之积分应从 y_c 下面绕过，这就是为什么当 $\operatorname{Im} y_c > 0$ 时，沿实轴已是正确的积分途径，而 $\operatorname{Im} c < 0$ 时，沿实轴不是正确的积分途径，所以，当 $\alpha R \to \infty$ 时，粘性解的极限并不一定是无粘解.

由于求解的是 Orr-Sommerfeld 方程的本征值问题，本征值 c 是待定的，而匹配法的解要不同区域有为同的表达式，十分不便，因此有必要求一致有效渐近解，我们仍可以采用 Langer 变换

$$\zeta = (\alpha R)^{1/3}\left[\frac{3}{2}\int_y^c \sqrt{y-y_c}\,dy\right]^{3/2} \tag{6.2.32}$$

从而得到改进的奇异无粘解和粘性解:

$$\Phi_2(y) = 1 + \cdots + \epsilon x_2^{(1)}\frac{p(y-y_c)}{p(o)} \tag{6.2.33}$$

$$x_3(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{U-c}\right)^{\frac{5}{4}}\int_\infty^\zeta d\zeta\int_\infty^\zeta d\zeta\zeta^{\frac{1}{2}}H^{(1)}_{1/3}\left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{6.2.34}$$

$$x_4(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{U-c}\right)^{\frac{5}{4}}\int_\infty^\zeta d\zeta\int_\infty^\zeta d\zeta\zeta^{\frac{1}{2}}H^{(2)}_{1/3}\left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{6.2.35}$$

这样，我们采用了第四、五章的理论获得了 Orr - Sommerfeld 方程的一致有效渐近解，不过这里的方程是含大参数 αR 的四阶复常微分方程

6.3 本征方程与中性曲线

由于平面 Poiseuille 流的速度廓线是对称的，所以，Orr-Sommerfeld 方程的解可以分解成奇函数与偶函数之和，即

$$\varphi(y)=\varphi_e(y)+\varphi_0(y) \tag{6.3.1}$$

计算表明只有对称解才能代表中性不稳定的解，所以我们只要研究偶函数的情况，研究的区域可置于 $(-1,0)$，对称条件为 $\varphi'(0)=\varphi'''(0)=0$. 一般地，O–S 方程的解由四个线性独立解组成，即

$$\varphi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3+c_4\varphi_4 \tag{6.3.2}$$

为了满足边界条件，指数增长的 φ_4 不存在，所以 $c_4=0$. 为满足在 $y=y_2=0$ 处，$\varphi'(y)=0$, 而且 φ_3 是指数衰减的，可略去不计，因此

$$c_1\varphi_{12}'+c_2\varphi_{22}'=0 \tag{6.3.3}$$

取

$$\Phi(y)=\varphi_{22}'\varphi_1(y)-\varphi_{12}'\varphi_2(y) \tag{6.3.4}$$

那么可得

$$\varphi(y)=\Phi(y)+c_3\varphi_3(y) \tag{6.3.5}$$

为满足 $y=y_1=-1$ 的边界条件 $\varphi(-1)=\varphi'(-1)=0$ 导出

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_1'}=\frac{\varphi_{31}}{\varphi_{31}'} \tag{6.3.6}$$

方程左边仅为 α, c 的函数，方程左边为 (α,c,R) 的函数.

用 Heisenberg 的解 (6.2.7),$\varphi_{11}=-c$, $\varphi_{21}=0$, $\varphi_{11}'=U_1'$, $\varphi_{21}'=-\dfrac{1}{c}$ 可以导出

$$1+2c\Phi_{22}'/\Phi_{12}'=\left(1+\frac{U_1'\varphi_{31}}{c\varphi_{31}'}\right)^{-1} \tag{6.3.7}$$

方程左边记为 $\tilde{u}+i\tilde{v}$, 右边可由

$$\frac{c}{U_1'}\frac{\varphi_{31}'}{\varphi_{31}}=\frac{5}{4}-z^{3/2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \tag{6.3.8}$$

得到

$$(\tilde{u}-1)+i\tilde{v}=\left(z^{3/2}e^{-\frac{\pi}{4}i}-\frac{9}{4}\right)^{-1} \tag{6.3.9}$$

其中 $z=c(\frac{\alpha R}{U_1'^2})^{1/3}$. 为了求中性曲线，先由一个实的 c 确定 $\tilde{u}$ 由右边的虚部确定 z, 可以计算出 α 以及 $\tilde{u}$, 再从已知的 z,α,c 获得 R. 这样便得到在 $(\alpha^2,\alpha R)$ 平面的中性曲线上一点，如此往复不已. 林家翘则用 Tietjens 函数

$$F(z)=\frac{-\int\limits_{\infty}^{-z}d\zeta\int\limits_{\infty}^{\zeta}\zeta^{1/2}H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}\right]d\zeta}{z\int\limits_{+\infty}^{-Z}\zeta^{1/2}H_{1/3}^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}\right]d\zeta} \tag{6.3.10}$$

下述方程

$$\tilde{u}+i\tilde{v}=[1-(1+\lambda)F(z)]^{-1} \tag{6.3.11}$$

或在 $\lambda\ll 1$ 时

$$\tilde{u}+i\tilde{v}=[1-F(z)]^{-1} \tag{6.3.12}$$

这里

$$z=(\alpha RU_c')^{1/3}(y_c-y_1)$$

来确定中性曲线. 他还在平行流的假定下，应用渐近方法解决了平板边界层流动的稳定性问题，获得了中性曲线和临界 Reynolds 数，同当时 Schubauer 和 Skramstad 在低湍流度风洞中的实验相比较，结果优于 Schlitchting 的理论.

6.4 广义 Airy 函数

从以上几节，我们可以看到， Orr - Sommerfeld 方程是如下含

大参数四阶微分方程的特例

$$L(\phi)=\frac{d^4\phi}{dx^4}+\lambda^2\left[P(x,\lambda)\frac{d^2\phi}{dx^2}+Q(x,\lambda)\frac{d\phi}{dx}+R(x,\lambda)\phi\right]=0 \tag{6.4.1}$$

其中 $\lambda\gg 1$, $P(x,\lambda)$, $Q(x,\lambda)$, $R(x,\lambda)$ 是复变量 x 的解析函数，并对 λ 有渐近展开

$$P(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x) \tag{6.4.2}$$

$$Q(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}Q_n(x) \tag{6.4.3}$$

$$R(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}R_n(x) \tag{6.4.4}$$

我们尤其对 $P_0(x)$ 有单零点转向点的情况感兴趣. 因为 Orr - Sommerfeld 方程与它有相同的行为，为此，我们只需研究更简单的方程

$$Lu(z)=u^{(4)}+\lambda^2(zu''+\alpha u'+\beta u)=0 \tag{6.4.5}$$

可类似于 Airy 方程，我们可用拉普拉斯变换求解，下述积分

$$u=\int_c \zeta^{\alpha-2}\exp\left(\frac{1}{3}\lambda^{-2}\zeta^3-\beta\zeta^{-1}+z\zeta\right)d\zeta \tag{6.4.6}$$

这就是方程 (6.4.5) 的积分形式解，并要求选择封闭围道满足

$$\zeta^{\alpha}\exp\left(\frac{1}{3}\lambda^{-2}\zeta^3-\beta\zeta^{-1}+z\zeta\right)\Big|_{c_1}^{c_2}=0 \tag{6.4.7}$$

通过选择不同积分路径，可得到均衡型，增长型，衰减型的线性独立解.

Reid 还用 Langer 变换将 Orr-Sommerfeld 方程变换成如下形式

$$\varepsilon^3(x^{(4)}+f_0x^{(3)})-(\eta+\varepsilon^3f_1)x''-(g_0+\varepsilon^3g_1)x'-(h_0+\varepsilon^3h_1)x=0 \tag{6.4.8}$$

$f_0, f_1, g_0, g_1, h_0, h_1$ 均为 η 的函数. 定义为

$$\eta = \left[\frac{3}{2}\int_{y_c}^{y}\left(\frac{u-c}{U_c'}\right)^{1/2}dy\right]^{3/2} \tag{6.4.9}$$

$$\phi(y) = \left[\eta'(y)\right]^{p} x(\eta) \tag{6.4.10}$$

$$\varepsilon = (i\alpha RU_c')^{\frac{-1}{3}} \tag{6.4.11}$$

方程 (6.4.8) 是 $p=0$ 的情况, 取 $p=-\dfrac{3}{2}$ 可消去三阶导数项, 该方程的解可以用广义 Airy 函数表示, 其定义为

$$A_k(z,p,q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} t^{-p}(\ln t)^q \exp\left(zt-\frac{1}{3}t^3\right)dt$$

$$(k=1,2,3) \tag{6.4.12}$$

$$B_k(z,p,q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty\exp\left[\frac{2}{3}(k-1)\pi i\right]}^{0} t^{-p}(\ln t)^q \exp\left(zt-\frac{1}{3}t^3\right)dt$$

$$(k=1,2,3) \tag{6.4.13}$$

这里, A_k 取 L_k 为普通 Airy 函数的积分路径, B_k 积分路径从 ∞ 沿不同辐角的射线积分到原点. 请注意通常的 Airy 函数是广义 Airy 函数特例, 即

$$A_k(z) = A_k(z,0,0) \tag{6.4.14}$$

这些函数的行为与图表可参考文献 (李家春 1985).

6.5 流动稳定性的物理机理

以上几节主要阐明了流动稳定性理论在数学上的困难, 但这个问题在物理上对粘性的作用在开始时也是不清楚的.

我们知道，当 $\alpha R \to \infty$ 时，Orr-Sommerfeld 方程就化为无粘的 Rayleigh 方程

$$\varphi'' - \alpha\varphi - \frac{U''}{U-c}\varphi = 0 \tag{6.5.1}$$

边界条件为 $y = \pm 1$ 时，$\varphi = 0$ 即法向速度为零，以函数 φ 的共轭函数乘方程，在 $(-1,1)$ 内积分可得

$$\int_{-1}^{1} (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy + \int_{-1}^{1} \frac{U''}{U-c} |\varphi|^2 dy = 0 \tag{6.5.2}$$

其虚部

$$\int_{-1}^{1} \frac{c_i U'' |\varphi|^2}{|U-c|^2} dy = 0 \tag{6.5.3}$$

由此可见，如果 $c_i \neq 0$, U'' 必须变号，即速度廓线必须有拐点才能失稳.

对于平面 Poiseuille 流来说，其速度廓线没有拐点，所以对无粘流动来说，平面 Poiseuille 流是稳定的. 但是，在实际上平面 Poiseuille 流可以有不稳定现象发生，所以，粘性除了因耗散有致稳作用外，还有失稳作用. 林家翘计算了扰动与主流的相互作用，在适当的相位关系下，可通过 Reynolds 应力作功将主流的能量传递给扰动使扰动增长，从中线曲线图上也可看出，当 Reynolds 数不断减小或粘性增大时，先使流动失稳，经过不稳区以后，流动才变得稳定，只有中间范围才是不稳定区域.

另外要指出的是，我们在这里采用的是简正模方法的时间模式，也就是说，规定波数 α 是实数，波速 c 是复数；也可以用空间模式来研究，这时假定波速 c 是实数，波数 α 是复数. 现在要建立两种模式增长率的联系，对中性曲线，我们有

$$F(\alpha, \sigma, R) = 0 \tag{6.5.4}$$

其中 $\sigma=\alpha c$, 现在给 R 一个增量 dR, 于是 $(d\sigma)_\alpha$ 的虚部是时间增长率，$(d\alpha)_\sigma$ 的虚部是空间增长率，因

$$(d\sigma)_\alpha = -dR\left(\frac{\partial F/\partial R}{\partial F/\partial \sigma}\right)$$

$$(d\alpha)_\sigma = -dR\left(\frac{\partial F/\partial R}{\partial F/\partial \alpha}\right)$$

所以

$$(d\sigma)_\alpha = (d\alpha)_\sigma \frac{\partial F/\partial \alpha}{\partial F/\partial \sigma} = -(d\alpha)_\sigma\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\right)_{R=R_0} = -c_g(d\alpha)_\sigma \quad (6.5.5)$$

其中 c_g 是群速度，说明两种增长率可以用一个 c_g 因子相联系，由于 c_g 一般是复数，还可以有相位差.

在实际情况中，往往是空间与时间同时发展的，如果有一局部扰动，我们可以将它看作为会有不同频率成分的波包，如果对所有成分其群速度大于零，尽管这些扰动在传播过程中要增大，这时在扰动发生处的扰动将消失，这种情况叫对流不稳定的；另一方面，如果在所含频率成分中有群速度为零的，这时，在扰动发生处，扰动将增长，这种情况称为绝对不稳定的.

另外，还要说明的是，由于我们这里所讨论的是线性理论，它可以用于判断什么时候会发生不稳定的充分条件，但不能说明亚临界与超临界失稳的差异，流动三维化的机理，这是因为流动失稳以后，扰动发展使得线性理论失效，这时往往要依靠弱非线理论来进行研究，从数学上讲，它属于本课程摄动理论的范畴. 为了要获得从层流到湍流转捩的全过程，还要依靠数值方法，这些内容不在这里赘述，可以阅读有关的参考文献 (Reid 1981).

习　　题

6.1 在二维流动 (包括主流与扰动) 的假定下，求出线性稳定的 Orr-Sommerfeld 方程

$$(D^2-\alpha^2)^2\phi - i\alpha R\left\{(D^2-\alpha^2)(U-c) - U''\right\}\phi = 0$$

以及给出相应的边界条件，并分析上述方程的性质.

6.2 试用 Frobenius 理论与 WKB 方法导出上述方程的级数解与渐近解.

6.3 在小 α 的假定下，推导 Heisenberg 的级数解与关于 $q(y)$ 各级近似的递推公式.

6.4 试证在变换

$$f = \sqrt{\zeta}g(\zeta^k)$$

下方程

$$f''(\zeta) + \zeta^m f(\zeta) = 0$$

可以变换成 $g(\xi)$ 的 Bessel 方程. 特别是 $m=1$, 可对应于 1/3 阶 Bessel 方程，并求出解以及一致有效渐近解.

6.5 对于有一阶转向点的四阶方程

$$u^{(4)}(z) + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$$

其中 λ^2, α β 为常数，试用 Laplace 变换

$$u(z) = \int_c e^{z\zeta} f(\zeta) d\zeta$$

求上述方程解的积分表示，并给出积分路径的条件.

第七章 奇异摄动方法

实际问题中归纳、提练出来的数学物理问题往往是比较复什的，很难用通常的数学方法得到解析解．于是人们经常采用各种近似解法和数值解法．摄动法就是经常被采用的且行之有效的方法．奇异摄动方法是一种渐近的分析方法，可以对微分方程的解的全局性行为进行系统的分析．它的优点是能够给出正确的解的解析结构用来进行物理问题的定性的和近似定量的讨论，这种优点是数值解所达不到的．摄动方法的主要思想是把一个困难的问题分解为无数个比较容易的问题．它的特点在于头几项 (往往是头一、二项) 就能揭示解的重要特征而以后的步骤只给出很小的修正．因此奇异摄动理论受到学术界的重视，逐步形成了较完整的理论．它的应用范围越来越广，已经应用于各个学科，而且成为解非线性问题的最有效的解析方法．

术语"摄动"来自天体力学，指的是某一天体受到一些未知天体的作用，其实际规道产生了与计算规道的误差．海王星、冥王星的发现就是摄动理论的杰作．作为有效的数学方法，摄动法有其悠久的历史． 1847 年 Stokes 在解非线性水波问题时就使用了变形参数法，此后摄动理论在发展中逐步形成．二次世界大战以来，力学的分析方法在广义变分原理和奇异摄动理论方面有重要的发展．与计算机相配合广义变分原理为有限元法提供了广阔的工作园地，而摄动理论为力学由线性区域进入非线性区域提供了必需的有效手段．

我国力学界对于奇异摄动理论的发展有着开创性的贡献．钱伟长 (W.Z. Chien) 在 1948 年解圆板大挠度问题时开创了现在称为合成展开法的重要方法，得到了很好的结果．郭永怀 (Y.H. Kuo) 在 1953 年把 Poincaré -Lighthill 方法推广应用于平板边界层的粘性流动问题．钱学森 (H.S. Tsien) 在 1956 年深入阐述了这个方法的重要

性并称它为 PLK 方法. 林家翘 (C.C. Lin) 于 1954 年对双曲型微分方程问题提出了通常称为解析特征线法的理论，为研究非线性波的问题提供了一个新的有效的途径. 国内还有很多学者在这方面做了很多工作，这里不能一一列举了.

近年来，摄动法的著作相当多，有的偏重数学理论，有的偏重实际应用，而在数学上不甚严谨. 本章采用后一种方式，介绍各种方法，叙述各种原理，并且通过一系列有物理背景的实例的分析，使读者掌握有关方法和要旨，用来解决各自的实际问题.

7.1 正则摄动和奇异摄动

摄动理论是研究求解含小参数的问题的近似解的理论. 设含小参数的微分方程为

$$P_\varepsilon:\begin{cases} L_\varepsilon[u(x,\varepsilon]=f(x,\varepsilon)\ , \quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\Omega & (7.1.1)\\ B_{\varepsilon,j}[u(x,\varepsilon]=\psi_j(x,\varepsilon)\ ,\quad j=1,2,\cdots,k\ ,\ x\in\partial\Omega & (7.1.2)\end{cases}$$

其中 L_ε 为含小参数 ε 的微分算子， $B_{\varepsilon j}$ 为定义在边界上的微分算子. 问题 P_ε 的求解步骤大致为

1. 选取渐近序列 $\{\delta_n(\varepsilon)\}$, 即选取满足条件

$$\text{a)}\ \lim_{\varepsilon\to0}\delta_n(\varepsilon)=0\ ,\ \text{b)}\ \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\delta_{n+1}(\varepsilon)}{\delta_n(\varepsilon)}=0\ (n=1,2,\cdots)\ (7.1.3)$$

的函数序列. $\{\varepsilon^n\}$ 是最常用的渐近序列.

2. 把解按渐近序列展开

$$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{N}\delta_n(\varepsilon)u_n(x)+Z_N(x,\varepsilon) \qquad (7.1.4)$$

代入原来的问题 (7.1.1) 和 (7.1.2), 比较 $\delta_n(\varepsilon)$ 的系数，得出各阶的递推方程和边界条件并求解之,

$$L_0(u_i)=H_i[u_0,u_1,\cdots,u_{i-1};x] \qquad (7.1.5)$$

$$B_{0,j}(u_i) = \Phi_j[u_0, u_1, \cdots, u_{i-1}; x] \tag{7.1.6}$$

其中 u_0 是退化问题 $(\varepsilon = 0)$ 的解

$$L_0(u_0) = f(x,0)\ , \qquad\qquad x \in \Omega \tag{7.1.7}$$

$$B_{0,j}(u_0) = \psi_j(x_0)\ , \quad j = 1, 2, \cdots, k,\ x \in \partial\Omega \tag{7.1.8}$$

3. 估计余项 $Z_n(x,\varepsilon)$

如果对于任一 N, 有

$$Z_n(x,\varepsilon) = O[\delta_{n+1}(\varepsilon)] \tag{7.1.9}$$

则记

$$u(x,\varepsilon) \sim u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\varepsilon) u_n(x) \tag{7.1.10}$$

称为渐近解或解的渐近展开式. 作为特例, 若 $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$, 则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n$ 为解的渐近幂级数. 如果 (7.1.9) 对 $x \in \Omega$ 一致地成立, 则 (7.1.10) 是问题 P_ε 的一致有效渐近展开式. 由上面的定义可知, 若级数 (7.1.10) 收敛, 那么它总是渐近解. 但是渐近展开式却可能是发散的. 幸运的是: 对足够小的 ε 我们只须求渐近展开的头几项就可以了, 而不必去求无穷级数的和.

在实际问题中估计余项较为困难, 可用下述方法判别一致有效性

$$\delta_{n+1}(\varepsilon) u_{n+1}(x) = o[\delta_n(\varepsilon) u_n(x)] \tag{7.1.11}$$

或等价地

$$u_{n+1}(x)/u_n(x) < \infty \quad\ x \in \Omega \tag{7.1.12}$$

物理实际问题中往往把得到的解与实验结果、数值结果等作比较, 以鉴别判断渐近展开的有效性.

如果用上述步骤可以得到摄动问题 p_ε 在区域 Ω 中一致有效的解, 则称 p_ε 是区域 Ω 中的正则摄动问题, 否则称为奇异摄动问题.

正则摄动问题的解可以用 ε 的幂级数表示，且摄动级数 (7.1.10) 有非零的收敛半径. 当 $\varepsilon \to 0$ 时，正则摄动问题的解光滑地趋于退化问题的解或零阶解 (摄动级数的主项). 但对奇异摄动问题来说，摄动级数或者收敛半径为零或者不是幂级数 (例如有对数项存在). 在有些奇异摄动问题如边界层问题中，退化问题的解不存在，所以处理这类问题时应该区分退化问题的解和零阶解，前者可以不存在，而后者作为摄动级数的主项是永远存在的. 有些奇异摄动问题的退化问题的解虽然存在，但其高阶项可能出现奇性，多数是在无穷域处出现无穷大的值，称为长期项.

有些问题表面上没有小参数，需要我们引入小参数，把原问题化为摄动问题. 引入小参数的方法很多，最好是这样引入小参数，使得零阶解能用解析式表示. 一般的说，解析的零阶解的存在保证了高阶项也可用解析式表示，这可使问题的解大大简化.

下面我们举三个例子说明正则摄动问题的解法.

[**例 7.1.1**]　试求

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0 \tag{7.1.13}$$

的根的近似值.

这个问题没有小参数 ε, 须要我们自己引入. 对于本例来说这并不难. 我们引入方程

$$x^3 - (4+\varepsilon)x + 2\varepsilon = 0 \tag{7.1.14}$$

当 $\varepsilon = 0.001$ 时， (7.1.14) 就是 (7.1.13).

我们求 (7.1.14) 的近似解. 设 (7.1.14) 的解为

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a_n \tag{7.1.15}$$

代入 (7.1.14) 可得 a_0 满足的方程

$$a_0^3 - 4a_0 = 0$$

可得 a_0 的三个根 $a_0=-2,0,2$. 这是摄动级数的零阶解也是退化问题的解.

把准确到二阶近似的第一个根写为

$$x_1=-2+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

代入 (7.1.14) 按 ε 的幂次排列可得

$$(8a_1+4)\varepsilon+(8a_2-a_1-6a_1^2)\varepsilon^2=O(\varepsilon^3)$$

因为 ε 是任意的, 所以上式中 ε 的每一幂次的系数都必须为零. 于是得到一组求解 $a_1,a_2,\cdots$ 的递推方程

$\varepsilon^1:\quad 8a_1+4=0$

$\varepsilon^2:\quad 8a_2-a_1-6a_1^2=0$

等等. 这些方程的解为 $a_1=\frac{-1}{2},a_2=\frac{1}{8},\cdots,x_1$ 的摄动展开为

$$x_1=-2-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{8}\varepsilon^2+\cdots$$

在上式中令 $\varepsilon=0.001$, 即得 (7.1.13) 的近似解. 从上式求得的 x_1 的准确度很高, 其误差小于 10^{-9}. 至此, 我们完全体会到 (7.1.14) 的优越性, 用它来求近似根既快又准确.

同理可求得

$$x_2=0+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

$$x_3=2+0\cdot\varepsilon+0\cdot\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

因为 $x=2$ 对所有的 ε 都是 (7.1.14) 的精确解, 所以 x_3 的摄动级数中 2 以后各项的系数都为零. 这些摄动级数对于 $|\varepsilon|<1$ 都收敛.

[例 **7.1.2**] 试求初值问题的近似解

$$y''=\varepsilon f(x)y\ ,\quad y(0)=1\ ,\quad y'(0)=1 \qquad (7.1.16)$$

其中 $f(x)$ 连续.

设 y 的摄动展开为

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(x)$$

其相应的边条件为

$$y_0(0)=1\;,\qquad y_0'(0)=1$$

$$y_n(0)=0\;,\qquad y_n'(0)=0\quad(n\geq 1)$$

退化问题的解为 $y_0=1+x$, 其 n 阶问题由下列方程决定

$$y_n''=y_{n-1}f(x)\;,\qquad y_n(0)=y_n'(0)=0 \tag{7.1.17}$$

一般来说，已知对应的齐次方程的解，其非齐次方程总可以用参数变易法求解. 所以退化问题可解，可以大大简化问题的解.

(7.1.17) 的解可写为

$$y_n=\int_0^x dt\int_0^t dsf(s)y_{n-1}(s)\;,\qquad n\geq 1$$

所以

$$\begin{aligned}y(x)=\;&1+x+\varepsilon\int_0^x dt\int_0^t ds(1+s)f(s)\\&+\varepsilon^2\int_0^x dt\int_0^t ds\int_0^s dv\int_0^v du(1+u)f(u)+\cdots\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

此级数第 N 项有界，其绝对值不大于 $\varepsilon^N x^{2N}K^N(1+|x|)/(2N)!$, 其中 K 是 $f(t)$ 在 $0\leq t\leq|x|$ 中的上界，因此，级数 (7.1.18) 对所有 x 收敛.

尽管摄动问题中 $\varepsilon\ll 1$, 但本题对 $\varepsilon=1$ 也成立，且当 x^2K 较小时，摄动级数收敛很快，只要取前几项即可，因而可用来求

$$y''=f(x)y\;,\qquad y(0)=1\;,\qquad y'(0)=1 \tag{7.1.19}$$

的近似解，而该方程只对特殊的 $f(x)$ 才有封闭形式的解.

若方程 (7.1.19) 中的 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近可展开为 Taylor 级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, 那么方程 (7.1.19) 的解也可用级数解

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad a_0=a_1=1 \tag{7.1.20}$$

表示，代入 (7.1.19) 可决定 a_n. (7.1.20) 的收敛半径可与 $f(x)$ 的 Taylor 级数的收敛半径一样大. 但摄动级数 (7.1.18) 的收敛半径是 x 的所有值，即使 $f(x)$ 根本没有 Taylor 级数展开，(7.1.18) 也一样收敛，所以 (7.1.18) 式的好处是显然的.

[例 **7.1.3**]　试求不可压缩流体绕近似圆截面柱体的流动.

设柱截面周线 Γ 的方程为 $r=a(1-\varepsilon\sin^2\theta)$, 以 a 为特征长度，U 为特征速度进行无量纲化，无量纲的流函数 ψ 满足

$$\Delta\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi=0 \tag{7.1.21}$$

$$\psi|_\Gamma=0\ , \qquad \Gamma:\ \rho=\frac{r}{a}=1-\varepsilon\sin^2\theta \tag{7.1.22}$$

$$\psi=\rho\sin\theta+o(1)\ , \qquad \rho\to\infty \tag{7.1.23}$$

这里小参数 ε 并不出现在方程中而是出现在边界条件中. 通常的做法是把解展开为摄动级数

$$\psi=\psi_0(\rho,\theta)+\varepsilon\psi_1(\rho,\theta)+\cdots$$

把边界条件在 $\varepsilon=0$ 处展开

$$\begin{aligned}\psi(1-\varepsilon\sin^2\theta,\theta)&=\psi_0(1-\varepsilon\sin^2\theta,\theta)+\varepsilon\psi_1(1-\varepsilon\sin^2\theta,\theta)+\cdots\\&=\psi_0(1,\theta)+\varepsilon[\psi_1(1,\theta)-\sin^2\theta\psi_{0\rho}(1,\theta)]+\cdots=0\end{aligned} \tag{7.1.24}$$

因为 ε 是任意的，所以有

$$\psi_0(1,\theta)=0$$

$$\psi_1(1,\theta) = \sin^2\theta\psi_{0\rho}(1,\theta)$$

退化问题为

$$\begin{aligned}&\Delta\psi_0 = 0\ , \qquad \rho{\geq}1\\&\psi_0(1,\theta) = 0\\&\psi_0 = \rho\sin\theta\ , \quad \rho\to\infty\end{aligned} \tag{7.1.25}$$

其解为

$$\psi_0 = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta$$

ψ_1 满足如下方程

$$\begin{aligned}&\Delta\psi_1 = 0\\&\psi_1(1,\theta) = \sin^2\theta\psi_{0\rho}(1,\theta) = 2\sin^3\theta\\&\psi_1 = (\infty,\theta) = 0\end{aligned} \tag{7.1.26}$$

利用分离变量法可得

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sin\theta}{\rho} - \frac{\sin 3\theta}{\rho^3}\right)$$

所以

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\varepsilon}{2}Ua\left(\frac{3a\sin\theta}{r} - \frac{a^3\sin 3\theta}{r^3}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{7.1.27}$$

类似地可求得二阶以上各项

$$\psi_n(\rho,\theta) = \sum_{i=0}^{n} A_i\rho^{-(2i+1)}\sin(2i+1)\theta \quad (n{\geq}1) \tag{7.1.28}$$

当 $\rho{\geq}1$ 时

$$\psi_{n+1}/\psi_n < \infty$$

所得到的解是一致有效的，在 $\varepsilon < 1$ 时级数收敛.

这里的三个例子的解都可以表示为 ε 的幂级数，且都在一定范围内收敛，是一致有效的，所以这三个例子都是正则摄动问题.

下面我们给出几个奇异摄动的例子：

[**例 7.1.4**]　试求边值问题

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0\ , \quad y(0) = a\ , \quad y(1) = b \quad (a \neq be) \tag{7.1.29}$$

的解.

我们试用上面解正则摄动问题的办法来求解. 设 $y = \sum\limits_{n=0} \varepsilon^n y_n$, 代入方程 (7.1.29) 可得退化问题

$$y_0' + y_0 = 0\ , \quad y_0(0) = a\ , \quad y_0(1) = b \tag{7.1.30}$$

因为一阶微分方程不可能有二个边界条件，所以 (7.1.30) 无解. 不仅退化问题无解，高阶问题也一样无解. 如果我们让方程 (7.1.30) 满足 $x = 1$ 处的条件，可得

$$y_0 = be^{1-x} \tag{7.1.31}$$

但该解不满足 $x = 0$ 处的条件.

事实上，方程 (7.1.29) 有精确解，其解为

$$y = \frac{(ae^{s_2} - b)e^{s_1 x} + (b - ae^{s_1})e^{s_2 x}}{e^{s_2} - e^{s_1}} \tag{7.1.32}$$

其中

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2\varepsilon}(-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}) = -1 - \varepsilon + \cdots \\ s_2 &= \frac{1}{2\varepsilon}(-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}) = \frac{-1}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon + \cdots \end{aligned} \tag{7.1.33}$$

且

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ x\ 固定}} y = \begin{cases} be^{1-x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \tag{7.1.34}$$

图 7.1.1 画出了 $a = 0, b = 1, \varepsilon = 0.1$ 和 0.01 时精确解 (7.1.32) 的曲线. 由图可知，该曲线在 $x = 0$ 附近 $O(\varepsilon)$ 的薄层外变化平缓，

精确解与零阶解 (7.1.31) 基本符合. 但在该薄层内函数变化剧烈, 迅速由 0 变化到 e 附近. 在这一薄层中 $\varepsilon y''$ 与 y' 相比已经不是小量, 不能忽略. 通常把这一函数变化很快的薄层称作边界层. 流体力学中粘性流体绕流物面时的边界层、固体力学中四周固定支承的板壳的边缘层、大气与地在(或海面)的界面层、冲击波、温跃层等等都是这种边界层.

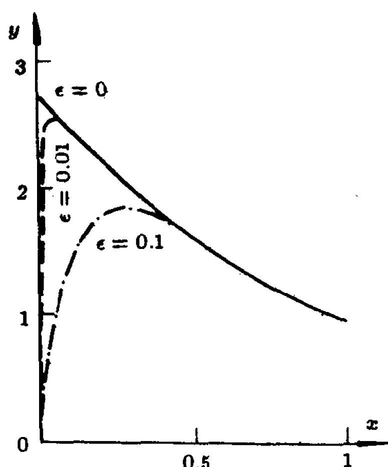


图 7.1.1 方程 (7.1.29) 的精确解 $(a=0, b=1)$

当小参数乘在方程的最高阶导数项时, 由于退化问题使方程降阶, 导致原来适定的边界条件变为不适定, 从而产生边界层. 当小参数乘在代数方程的最高次方项时, 其退化问题会导致代数方程的根的丢失, 使解的性质发生突变, 这类问题也是奇异摄动问题. 当小参数乘在偏微分方程的最高阶偏导数项时, 其退化问题可以发生偏微分方程的类型变化或降阶, 也会产生边界层. 例如椭圆型方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \varepsilon\varphi_{yy} - \varphi_y = 0\ , & 0 \le x\ ,\ \ y \le 1 \\ \varphi(0,y) = a(y)\ , & \varphi(x,0) = b(x) \\ \varphi(1,y) = c(y)\ , & \varphi(x,1) = d(x) \end{cases}$$

其退化问题为

$$\varphi_{xx} - \varphi_y = 0$$

这是一个抛物型方程，一般不能满足所列的四个边界条件，因此退化问题无解. 事实上该方程在 $y = 1$ 处有一个边界层.

某些情况下，尽管小参数没有乘在最高阶导数前，但若自变量的区间与 ε 有关，即所谓奇异边界问题，也是奇异摄动问题.

下面我们将给出另一类奇异摄动问题的例子.

[**例 7.1.5**]　试求下述线性振动问题的渐近解

$$y'' + (1+\varepsilon)y = 0\ , \quad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 1 \tag{7.1.35}$$

按照正则摄动的求解方法，设

$$y = \sum_{n=0} \varepsilon^n y_n \tag{7.1.36}$$

(7.1.35) 的退化问题为

$$y_0'' + y = 0\ , \quad y_0(0) = 0\ , \quad y'(0) = 1 \tag{7.1.37}$$

其解为

$$y_0 = \sin t \tag{7.1.38}$$

一阶解 y_1 满足

$$y_1'' + y_1 = -\sin t\ , \quad y_1(0) = 0\ , \quad y_1'(0) = 0 \tag{7.1.39}$$

其解为

$$y_1 = \frac{1}{2}(t\cos t - \sin t) \tag{7.1.40}$$

所以

$$y = \sin t + \frac{1}{2}\varepsilon(t\cos t - \sin t) + O(\varepsilon^2) \tag{7.1.41}$$

当 $t \to \infty$ 时，上式 $t\cos t$ 这一项使 $y_1/y_0 \to \infty$, 导致了一致有效性准则 (7.1.12) 被破坏. 这种项称为长期项. 若继续求高阶项时还会出现 t 的幂次更高的项. 这是另一类奇异摄动问题.

方程 (7.1.35) 有精确解

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sin(\sqrt{1+\varepsilon} t) \tag{7.1.42}$$

其振动频率为

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{7.1.43}$$

由 (7.1.35) 的精确解 (7.1.42) 可知，精确解没有奇性，物理问题本身没有奇性. 所以，渐近解 (7.1.41) 中的奇性是不合理的. 事实上，由 (7.1.43) 知，精确解的周期已不是 2π, 而是 ε 的函数. 也就是说，微小的恢复力 εy 引起了振动周期的变化. 而我们在正则摄动展开中，每一阶的解的周期仍然是 2π, 即正则摄动方法仍然在寻求周期为 2π 的解，这当然会引发共振，导致长期项的产生.

问题 (7.1.35) 是否是奇异摄动问题还与自变量的区间有关. 当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 $0 \le t < \infty$ 内，$\frac{\varepsilon}{2} t \cos t$ 不是一致地趋向于零，所以问题 (7.1.35) 是奇异摄动问题. 但在任一有限区间 $0 \le t \le T_0$ 内，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\frac{1}{2}\varepsilon t \cos t$ 一致收敛于零，那么问题 (7.1.35) 又是正则摄动问题了.

奇异摄动问题主要分为两类. 一类与例 7.1.4 相似，其退化问题无解，问题中包含有函数变化很快的边界层，须要由边界层理论来处理，称为边界层型奇异摄动问题；另一类与例 7.1.5 相似，其退化问题有解，但在高阶近似中出现长期项，产生非一致的奇性，须用 PLK 方法，平均法或多重尺度法等方法求解，称作长期项型奇异摄动问题. 对于最高阶导数项乘以小参数的线性微分方程来说，WKB 理论是一种强有力的工具，转向点问题也是奇异摄动的一个方面. 因为本书第五章已有专门叙述. 这里不再涉及.

7.2 PLK 方法

由例 7.1.5 可知，若按一般正则摄动问题的解法去解某些常微分方程的初值问题会出现长期项，而且这种长期项不是物理问题固

有的而是人为的，是由于假设的解不合理而引起的．处理这种长期项型的奇异摄动问题的核心就是引进各种技巧以消去长期项，求得一致有效的渐近解．本节我们介绍 PLK 方法 (又称坐标变形法)，其它的方法如平均法、多重尺度法等将在后面几节陆续加以介绍．

例 7.1.5 告诉我们，在非线性问题中周期或频率一般与振幅有关而不再是一个常数．由此可以想到在对函数作渐近展开的同时，对频率、波数、波速、特征值等参数或者坐标、时间等自变量中的某一个（或几个）也应作摄动展开，用消去长期项来确定自变量的摄动展开式，从而得到问题的一致有效解．这就是 PLK 方法的基本思想．因为在这种方法中自变量也要作伸缩变换，所以 PLK 方法也叫变形坐标法．

1882 年天文学家 Lindstedt 在求解 $u''+\omega_0^2u=\varepsilon f(u,u')$ 时首先应用了这种技巧． 1892 年 Poincaré 证明了 Lindstedt 得到的展开式是渐近的．这就是 PLK 方法的雏形 LP 方法．事实上这种方法的应用可以追溯到更早． 1847 年 Stokes 在研究被后人称作为 Stokes 波的非线性水波传播问题时就已经应用了这种方法． LP 方法有局限性，它对于消除某些问题中高阶近似的奇异性无能为力． 1949 年 Lighthill 引进了自变量的非线性变换，用高阶解的奇性并不比一阶解的奇性更强的原则，得到了一系列空气动力学问题的一致有效渐近解． 1953 年郭永怀 (Y.H. Kuo) 把这种方法应用到大 Reynolds 数粘性流动，与边界层方法相结合，得到了一致有效的流场．所以钱学森 (H.S. Tsien) 于 1956 年在一篇综述文章中把该方法叫作 PLK 方法．

我们以 Duffing 方程为例来说明 LP 方法．

[**例 7.2.1**]　试求 Duffing 方程

$$y''+y+\varepsilon y^3=0\ ,\quad y(0)=a_0\ ,\quad y'(0)=0 \tag{7.2.1}$$

的渐近解．

首先把函数作渐近展开

$$y=\sum_{n=1}\varepsilon^n y_n \tag{7.2.2}$$

由于非线性振动的频率是振幅和小参数的函数，所以我们对频率作展开如下:

$$\omega(a_0,\varepsilon)=\omega_0+\varepsilon\omega_1(a_0)+\varepsilon^2\omega_2(a_0)+\cdots$$

其中 $\omega_0=1$ 为退化问题的频率. 这相当于对时间自变量作如下的线性变换:

$$\tau=\omega t=[1+\varepsilon\omega_1(a_0)+\varepsilon^2\omega_2(a_0)+\cdots]t \tag{7.2.3}$$

于是方程及初条件 (7.2.1) 变为

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots)^2\frac{d^2y}{d\tau^2}+y+\varepsilon y^3=0\\&y(0)=a_0\ ,\qquad \frac{dy}{d\tau}|_{\tau=0}=0\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

把 (7.2.2) 代入 (7.2.4), 按 ε 的幂次排列，可得递推方程及各阶的初始条件

$$L(y_0)\equiv\frac{d^2y_0}{d\tau^2}+y_0=0\ ,\quad y_0(0)=a_0\ ,\quad \left.\frac{dy_0}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{7.2.5}$$

$$L(y_1)=-y_0^3-2\omega_1\frac{d^2y_0}{d\tau^2}\ ,\quad y_1(0)=0\ ,\quad \left.\frac{dy_1}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{7.2.6}$$

$$\begin{aligned}L(y_2)=-3y_0^2y_1-2\omega_1\frac{d^2y_1}{d\tau^2}-(\omega_1^2+2\omega_2)\frac{d^2y_0}{d\tau^2}\\ y_2(0)=0\ ,\quad \left.\frac{dy_2}{d\tau}\right|_{\tau=0}=0\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

零阶量的解为

$$y_0=a_0\cos\tau \tag{7.2.8}$$

代入 (7.2.6), 得到

$$L(y_1)=(2\omega_1-\frac{3}{4}a_0^2)a_0\cos\tau-\frac{1}{4}a_0^3\cos3\tau \tag{7.2.9}$$

对应于上式右端第一项的特解为 $\tau\sin\tau$, 它是长期项, 是不合理的, 必须消去. 令上式 $\cos\tau$ 的系数为零，可得

$$\omega_1 = \frac{3}{8}a_0^2 \tag{7.2.10}$$

因此，(7.2.9) 的解为

$$y_1 = \frac{1}{32}a_0^3(\cos 3\tau - \cos\tau) \tag{7.2.11}$$

把 (7.2.8), (7.2.10) 和 (7.2.11) 代入 (7.2.7) 可得 y_2 的方程

$$L(y_2) = (\frac{21}{128}a_0^4 + 2\omega_2)a_0\cos\tau + \frac{3}{16}a_0^5\cos 3\tau - \frac{3}{128}a_0^5\cos 5\tau$$

要使 y_2 不含长期项，须令上式右端第一项的系数为零，于是

$$\omega_2 = \frac{-21}{256}a_0^4$$

$$y_2 = \frac{1}{1024}a_0^5(\cos 5\tau - 24\cos 3\tau + 23\cos\tau)$$

综上所述，Duffing 方程的渐近解为

$$y = a_0\cos\tau + \frac{\varepsilon}{32}a_0^3(\cos 3\tau - \cos\tau) + \frac{\varepsilon^2}{1024}a_0^5(\cos 5\tau - 24\cos 3\tau + 23\cos\tau) + O(\varepsilon^3) \tag{7.2.12}$$

其中

$$\tau = \omega t = [1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2 - \frac{21}{256}\varepsilon^2 a_0^4 + O(\varepsilon^3)]t \tag{7.2.13}$$

LP 方法是先对自变量作变换，把问题变换为新的自变量的微分方程，然后在各阶解中消去长期项，确定变换函数而得到一致有效解. 也可以改变次序，先按正则摄动的办法求得问题的非一致有效解，然后把自变量变换代入非一致有效解中，在自变量的未扰动量附近对解作展开，通过消除长期项或奇异性条件以确定各阶变形函数，这种做法叫重整化方法. 我们仍以 Duffing 方程 (7.2.1) 为例加以说明.

不难得到 (7.2.1) 的正则摄动解

$$y = a_0\cos t + \varepsilon a_0^3[\frac{-3}{8}t\sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t)] + O(\varepsilon^2) \quad (7.2.14)$$

上式的第二项为长期项，为消去该项，我们令

$$\tau = \omega t = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)t \quad (7.2.15)$$

把 (7.2.15) 代入 (7.2.14)，把 $\cos t$ 在 $t = \tau$ 附近按小参数 ε 作 Taylor 展开，得到

$$y = a_0\cos\tau + \varepsilon[a_0(\omega_1 - \frac{3}{8}a_0^2)\tau\sin\tau + \frac{1}{32}a_0^3(\cos 3\tau - \cos\tau)] + O(\varepsilon^2)$$

为消除上式中的长期项 $\tau\sin\tau$，必须

$$\omega_1 = \frac{3}{8}a_0^2$$

从而解得

$$y = a_0\cos\tau + \varepsilon a_0^3\frac{1}{32}(\cos 3\tau - \cos\tau) + O(\varepsilon^2) \quad (7.2.16)$$

$$\tau = (1 + \varepsilon\frac{3}{8}a_0^2)t + O(\varepsilon^2) \quad (7.2.17)$$

准确到 $O(\varepsilon)$ 阶，(7.2.16), (7.2.17) 与 (7.2.12), (7.2.13) 一致.

Lighthill 推广了 LP 方法，他引进了如下展开

$$y = \sum_{n=0} \varepsilon^n y_n(\xi, x_2, \cdots x_N) \quad (7.2.18)$$

$$x_1 = \xi + \sum_{m=1} \varepsilon^m \xi_m(\xi, x_2, \cdots x_N) \quad (7.2.19)$$

其中 ξ_m 为坐标变形函数，一般是 ξ 的非线性函数，在求解过程中由消除高阶项的强奇性要求确定. 显然，LP 方法是 Lighthill 方法的特例. 在某些较复杂的问题中，进行变形的坐标可以有好几个. Lighthill 是通过考虑方程

$$(x + \varepsilon y)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

来引进这个方法的. 对 r, q 加以某些不是很严格的限制之后, 解的收敛性已被证明. 下面我们用一个模型方程来说明 Lighthill 方法.

[**例 7.2.2**] 试求下述方程的渐近解

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=1\ ,\quad y(1)=2 \tag{7.2.20}$$

在解该问题之前先看一下 (7.2.20) 的直接摄动展开解

$$y\sim\frac{1+x}{x}-\varepsilon\frac{(1-x)(1+3x)}{2x^3}+\varepsilon^2\frac{(1+x)(1-x)(1+3x)}{2x^5}+\cdots \tag{7.2.21}$$

(7.2.21) 收敛, 但 $x\to 0$ 时, 收敛半径趋于零, 所以展开式在 $x=0$ 是非一致有效的. (7.2.20) 的精确解为

$$y=\sqrt{(\frac{x}{\varepsilon})^2+2\frac{1+x}{\varepsilon}+4}-\frac{x}{\varepsilon} \tag{7.2.22}$$

它在 $x=0$ 处为有限. 方程 (7.2.20) 沿直线 $x+\varepsilon y=0$ 有奇性, 而线性化的退化问题将奇性移到了 $x=0$. 在高阶近似中这种奇性不但没有被矫正, 反而增强了. 下面我们用 Lighthill 方法求解.

设

$$y=\sum\varepsilon^n y_n(\xi) \tag{7.2.23}$$

$$x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\cdots=\xi+\sum_{m=1}\varepsilon^m x_m \tag{7.2.24}$$

代入方程 (7.2.20), 并令 ε 的同次幂项相等得

$$(\xi y_0)'=1 \tag{7.2.25}$$

$$(\xi y_1)'=y_0'(\xi x_1'-x_1-y_0)=[x_1(1-y_0)-\frac{1}{2}y_0^2]' \tag{7.2.26}$$

其中 $'$ 号记作对 ξ 的导数. 下面导出边界条件. 我们记对应于 $x=1$ 的 ξ 值为 $\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi}$ 是方程

$$\tilde{\xi}=1-\sum_{m=1}\varepsilon^m x_m(\tilde{\xi}) \tag{7.2.27}$$

的根. 在 $\tilde{\xi}=1$ 处进行 Taylor 展开，把上式按 ε 的幂次排列可得

$$\tilde{\xi}=1-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2[x_2(1)-x_1(1)x_1'(1)]+\cdots \tag{7.2.28}$$

所以边界条件 $y|_{x=1}=2$ 变为

$$\begin{aligned}
2=&\ y|_{\xi=1}+\left.\frac{dy}{d\xi}\right|_{\xi=1}\{-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2[x_2(1)-x_1(1)x_1'(1)]+\cdots\}\\
&+\left.\frac{1}{2}\frac{d^2y}{d\xi^2}\right|_{\xi=1}\{-\varepsilon x_1(1)-\varepsilon^2[x_2(1)-x_1(1)x_1'(1)]+\cdots\}^2+\cdots\\
=&\ y_0|_{\xi=1}+\varepsilon[y_1-x_1y_0']|_{\xi=1}+\varepsilon^2\{y_2-y_1'x_1-y_0'(x_2-x_1x_1')\\
&+\left.\frac{1}{2}y_0''\,x_1^2\}\right|_{\xi=1}+\cdots
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

令上式两边 ε 的同次幂相等可分别得到各阶的边界条件. 相对来说边界条件是比较复杂. 不过在通常情况下我们总是希望把边界点 $x=1$ 变为 $\xi=1$, 这样 $x_n(1)=0$, 边界条件 (7.2.29) 就变得简单多了.

(7.2.25) 满足边界条件 (7.2.29) 的解为

$$y_0=\frac{1+\xi}{\xi} \tag{7.2.30}$$

于是关于 y_1 的方程 (7.2.26) 就变为

$$(\xi y_1)'=-[\frac{1+2\xi}{2\xi^2}+\frac{x_1(\xi)}{\xi}]' \tag{7.2.31}$$

按照 y_1 的奇性不比 y_0 强的要求，最简单的办法是让 (7.2.31) 的右端为零，即

$$\frac{1+2\xi}{2\xi^2}+\frac{x_1(\xi)}{\xi}=\text{const} \tag{7.2.32}$$

聪明的读者也许已经看出这种选择不是唯一的，因为 (7.2.32) 式右边的常数不是唯一的，可用 ξ 的任何正则函数代替，由此得到的 y_1 奇性都不比 y_0 强. 所以如何选择变形不是唯一的，而是悬而未决的. 这是 Lighthill 方法的特点.

若选择 (7.2.32) 式右边的常数为零，可得一致有效的一阶近似

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1+\xi}{\xi} + O(\varepsilon) \\
x &= \xi - \varepsilon\frac{1+2\xi}{2\xi} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.2.33}
$$

消去 ξ 可得

$$
y = \sqrt{(\frac{x}{\varepsilon})^2 + 2\frac{1+x}{\varepsilon} + 1} - \frac{x}{\varepsilon} \tag{7.2.34}
$$

若选择 (7.2.32) 式右边的常数为 3/2，则 $x = 1$ 对应于 $\xi = 1$，一阶的一致有效近似为

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1+\xi}{\xi} + O(\varepsilon) \\
x &= \xi + \varepsilon\frac{3\xi^2 - 2\xi - 1}{2\xi} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.2.35}
$$

消去 ξ 即得本问题的精确解 (7.2.22). 由此可见，在奇异摄动中，摄动展开的项数越多不一定是越精确，要选择最佳的截断项数. 一般只取前面几项就可以了.

在 $x = 0$ 处，形式的直接展开式 (7.2.21) 发散. 而一种渐近展开的结果 (7.2.35) 即为精确解，在 $x = 0$ 处的值为 $(\frac{2}{\varepsilon} + 4)^{1/2}$; 另一种渐近展开 (7.2.34) 在 $x = 0$ 处的值为 $(\frac{2}{\varepsilon} + 1)^{1/2}$，两者之差与首项相比为 $O(\varepsilon)$ 量级.

对某些较复杂的问题往往要联合应用上面的几种方法. 林家翘与 Fox 利用特征坐标进行摄动展开，并结合重整化方法，简化了一些问题的求解. 下面以偏微分方程的 Cauchy 问题为例来加以说明.

[**例 7.2.3**]　试求下述问题的渐近解

$$
u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon u_x u_{xx}\ , \quad u(x,0) = 2f(x)\ , u_t(x,0) = 0 \tag{7.2.36}
$$

引进特征坐标

$$
\xi = x - t\ , \qquad \eta = x + t \tag{7.2.37}
$$

(7.2.36) 化为

$$
\begin{aligned}
&-4u_{\xi\eta}=\varepsilon(u_\xi+u_\eta)(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})\\
&u(\xi,\xi)=2f(\xi)\ ,\qquad u_\xi(\xi,\xi)=u_\eta(\xi,\xi)
\end{aligned}
\tag{7.2.38}
$$

容易求得 (7.2.36) 的正则摄动解为

$$
\begin{aligned}
u=&f(\xi)+f(\eta)+\varepsilon\{\frac{1}{8}(\xi-\eta)f'^2(\xi)-\frac{1}{8}(\xi-\eta)f'^2(\eta)\\
&+\frac{1}{4}[f'(\xi)-f'(\eta)][f(\xi)-f(\eta)]+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.2.39}
$$

上式的一阶项中出现了长期项. 现在用重整化方法对 (7.2.39) 进行重新整理，对特征线坐标进行摄动展开

$$
\xi=r+\varepsilon\xi_1(r,s)+O(\varepsilon^2)\ ,\qquad \eta=s+\varepsilon\eta_1(r,s)+O(\varepsilon^2) \tag{7.2.40}
$$

把上式代入 (7.2.39) 并对首项 $f(\xi),f(\eta)$ 分别在 $\xi=r$ 和 $\eta=s$ 处作 Taylor 展开，得到

$$
\begin{aligned}
u=&f(r)+f(s)+\varepsilon\{f'(r)[\xi_1(r,s)+\frac{1}{8}(r-s)f'(r)]+f'(s)[\eta_1(r,s)\\
&-\frac{1}{8}(r-s)f'(s)]+\frac{1}{4}[f'(r)-f'(s)][f(r)-f(s)]\}+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.2.41}
$$

消去上式中的长期项，有

$$
\xi_1(r,s)=\frac{-1}{8}(r-s)f'(r)\ ,\qquad \eta_1(r,s)=\frac{1}{8}(r-s)f'(s) \tag{7.2.42}
$$

所以 (7.2.36) 的渐近解为

$$
u=f(r)+f(s)+\frac{1}{4}\varepsilon[f'(r)-f'(s)][f(r)-f(s)]+O(\varepsilon^2) \tag{7.2.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&\xi=x-t=r-\frac{1}{8}\varepsilon(r-s)f'(r)+O(\varepsilon^2)\\
&\eta=x+t=s+\frac{1}{8}\varepsilon(r-s)f'(s)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.2.44}
$$

线性情况下的特征线

$$\xi = x - t = \text{const}, \quad \eta = x + t = \text{const}$$

变成了

$$r = x - t - \frac{1}{4}\varepsilon t \frac{df(x-t)}{d(x-t)} = \text{const}$$

$$s = x + t + \frac{1}{4}\varepsilon t \frac{df(x+t)}{d(x+t)} = \text{const}$$

综上所述， PLK 方法确实是求各种物理问题的一致有效渐近解的一种有效的技巧. 它对双曲型方程的行波解是成功的，但不能得到椭圆型方程的一致有效展开. PLK 方法可以给出弱非线性振子的周期解，但对阻尼或自激振动情况，除了极限环和极限点以外不能给出渐近解. 一般的说，如果振幅随时间而变化， PLK 方法就不适用了，需要采用下面讲到的平均法或多重尺度方法.

7.3 平均法

这一节所述的方法主要是原苏联学者 Krylov, Bogoliubov 和他们的学生 Mitropolski 的贡献，所以有的书上叫 KBM 方法. 首先，我们以一个弱非线性二阶方程为例来说明平均法的思想.

[**例 7.3.1**] 考虑弱非线性二阶方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \varepsilon f(y, \frac{dy}{dt}) \tag{7.3.1}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时， (7.3.1) 的退化方程的通解为

$$y = a\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{7.3.2}$$

其中 a 和 θ 是振幅和初始位相，是常数. 当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时，可以假定 (7.3.1) 的解的形式仍为 (7.3.2), 但 a 和 θ 不是常数而是 t 的缓变

函数. 由于 y, a, θ 三个未知函数只有 (7.3.1)、(7.3.2) 两个关系，它们之间还有一个自由度. 我们这样来补充它们之间的另一个关系，使得 $\dfrac{dy}{dt}$ 在形式上和 a, θ 为常数时的 $\dfrac{dy}{dt}$ 相同，即

$$\frac{dy}{dt} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) \tag{7.3.3}$$

这实际上相当于对 a 和 θ 加了一个约束条件

$$\frac{da}{dt}\cos\varphi - a\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi = 0\ , \qquad \varphi = \omega_0 t + \theta \tag{7.3.4}$$

未知函数的二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a\omega_0^2\cos\varphi - \omega_0\frac{da}{dt}\sin\varphi - a\omega_0\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi \tag{7.3.5}$$

把 (7.3.2), (7.3.3) 和 (7.3.5) 式代入原方程 (7.3.1) 得

$$\omega_0\frac{da}{dt}\sin\varphi + a\omega_0\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi = -\varepsilon f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \tag{7.3.6}$$

由 (7.3.4),(7.3.6) 解得

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\varepsilon}{\omega_0}\sin\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \tag{7.3.7}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}\cos\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \tag{7.3.8}$$

由上面两式可知，$\dfrac{da}{dt}, \dfrac{d\theta}{dt}$ 都是 ε 的量级，a 和 θ 确是缓变函数, 因此在考察它们的长时期的变化时, 可以认为它们在一个周期 $T = 2\pi/\omega_0$ 内不变. 因此，对 (7.3.7) 和 (7.3.8) 在一个周期内取平均可得

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\varepsilon}{\omega_0}f_1(a) = \frac{-\varepsilon}{\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)d\varphi \tag{7.3.9}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}g_1(a) = \frac{-\varepsilon}{a\omega_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)d\varphi \tag{7.3.10}$$

上面两式还可以这样解释. 把 (7.3.7) 和 (7.3.8) 的右端展开为 Fourier 级数, 即

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon[\frac{-1}{2\omega_0}2f_1(a) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon[\frac{-1}{2a\omega_0}2g_1(a) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt + d_n\sin nt)]$$

对于 a 和 θ 的长时间的行为来说, 首项的平均效应起主导作用, 而振荡项的累计效应很少, 因而可以近似地简化为 (7.3.9) 和 (7.3.10). 从 (7.3.9) 和 (7.3.10) 出发, 就不难求得 a 和 θ 了.

对于弱阻尼线性振动情形

$$f(y,\dot{y}) = -2\dot{y} \tag{7.3.11}$$

于是

$$f_1(a) = \omega_0 a\ , \qquad g_1(a) = 0 \tag{7.3.12}$$

代入 (7.3.9) 和 (7.3.10), 有

$$a = a_0 e^{-\varepsilon t}\ , \qquad \theta = \theta_0 \tag{7.3.13}$$

所以

$$y = a_0 e^{-\varepsilon t}\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{7.3.14}$$

对于 Duffing 方程

$$f(y,\dot{y}) = -y^3 \tag{7.3.15}$$

因此

$$f_1(a) = 0\ , \qquad g_1(a) = \frac{-3}{8}a^3 \tag{7.3.16}$$

从而解得

$$a = a_0\ , \qquad \theta = \frac{3}{8}\frac{\varepsilon a_0^2}{\omega_0}t + \theta_0 \tag{7.3.17}$$

对于 $\omega_0 = 1$, $y(0) = a_0$, $\dot{y}(0) = 0$ 的情形有

$$y = a_0 \cos[(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2)t] + O(\varepsilon)$$

这与 PLK 方法得到的结果一致.

对于 Van der Pol 振荡器,

$$f(y, \dot{y}) = (1 - y^2)\frac{dy}{dt} \tag{7.3.18}$$

相应地有

$$f_1 = -2\omega_0 a(1 - \frac{1}{4}a^2)\ , \quad g_1 = 0 \tag{7.3.19}$$

所以

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2}(1 - \frac{1}{4}a^2)\ , \quad \theta = \theta_0 \tag{7.3.20}$$

积分之可得

$$a^2 = \frac{4}{1 + (\frac{4}{a_0^2} - 1)e^{-\varepsilon t}}\ , \tag{7.3.21}$$

当 $t \to \infty$ 时, $a^2 \to 4$, 这就是极限环.

上面介绍的平均法只能得到首项解. 在某些问题中平均化方法的一次近似会得出不完全的解. 例如, 带平方项的非线性系统, 由 (7.3.9)(7.3.10) 得到 $da/dt = d\theta/dt = 0$, 因此一次近似反映不了平方项非线性的影响. 为反映偶次项的影响必须寻求其高阶近似. 现在已经提出了不少方法. 下面我们介绍著名的 KBM 方法. 该法假设 (7.3.1) 的渐近展开的形式为

$$y = a\cos\varphi + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n y_n(a, \varphi) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{7.3.22}$$

其中 y_n 为 φ 的周期函数, 周期为 2π, 而 a 和 φ 是时间的函数, 且

$$\frac{da}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n A_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{7.3.23}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \varphi_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{7.3.24}$$

这里的 A_n, φ_n 由递推方程消去长期项、保证 y_n 为周期解而得， y_n 则由递推方程及初始条件决定. 事实上，这里已经相当于把 y 看作为 a 和 φ 的函数而代替了原来的自变量 t, 其思想已经与下一节要讲的多重尺度法很相似了. 所以求导需遵循下列多元复合函数求导法则.

$$\frac{d}{dt}=\frac{da}{dt}\frac{\partial}{\partial a}+\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=(\frac{da}{dt})^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{d^2a}{dt^2}\frac{\partial}{\partial a}+2\frac{da}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial^2}{\partial a\partial\varphi}+(\frac{d\varphi}{dt})^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{da}{dt})=\frac{da}{dt}\frac{d}{da}(\frac{da}{dt})=\frac{da}{dt}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\frac{dA_n}{da}=\varepsilon^2A_1\frac{dA_1}{da}+O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{da}{dt}\frac{d}{da}(\frac{d\varphi}{dt})=\frac{da}{dt}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\frac{d\varphi_n}{da}=\varepsilon^2A_1\frac{d\varphi_1}{da}+O(\varepsilon^3)$$

我们以 Duffing 方程 (7.2.1) 为例来说明 KBM 方法.

把 (7.3.22) — (7.3.24) 代入 (7.2.1) 得到递推方程

$$\frac{\partial^2y_1}{\partial\varphi^2}+y_1=2A_1\sin\varphi+(2\varphi_1a-\frac{3}{4}a^3)\cos\varphi-\frac{1}{4}a^3\cos3\varphi \quad (7.3.25)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2y_2}{\partial\varphi^2}+y_2=&[(2\varphi_2+\varphi_1^2)a-A_1\frac{dA_1}{da}]\cos\varphi+[2(A_2+A_1\varphi_1)\\&+aA_1\frac{d\varphi_1}{da}]\sin\varphi-3y_1a^2\cos^2\varphi-2\varphi_1\frac{\partial^2y_1}{\partial\varphi^2}\\&-2A_1\frac{\partial^2y_1}{\partial a\partial\varphi}\end{aligned} \quad (7.3.26)$$

为了消去 y_1, y_2 中的长期项，保证 y_1, y_2 为周期解， (7.3.25) 和 (7.3.26) 式右端 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 项的系数必须为零. 于是由 (7.3.25) 得

$$A_1=0\ , \qquad \varphi_1=\frac{3}{8}a^2 \quad (7.3.27)$$

考虑到初始条件，(7.3.25) 的解为

$$y_1 = \frac{1}{32}a_0^3(\cos 3\varphi - \cos\varphi) \tag{7.3.28}$$

把 (7.3.27) 和 (7.3.28) 代入 (7.3.26) 得到

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial\varphi_2} + y_2 = 2A_2\sin\varphi + (2\varphi_2 + \frac{21}{128}a^4)a\cos\varphi$$
$$+\frac{3}{16}a^5\cos 3\varphi - \frac{3}{128}a^5\cos 5\varphi \tag{7.3.29}$$

类似地有

$$A_2 = 0\ , \quad \varphi_2 = -\frac{21}{256}a^4 \tag{7.3.30}$$

$$y_2 = \frac{1}{1024}a_0^5[\cos 5\varphi - 24\cos 3\varphi + 23\cos\varphi] \tag{7.3.31}$$

而且

$$a = a_0 + O(\varepsilon^3) \tag{7.3.32}$$

$$\varphi = [a + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2 - \frac{21}{256}\varepsilon^2 a_0^4 + O(\varepsilon^3)]t \tag{7.3.33}$$

所有这些结果与 PLK 方法得到的结果完全一致.

[**例 7.3.2**]　考虑非线性波动方程 (Klein-Gordon 方程)

$$u_{tt} - c^2u_{xx} + \lambda^2 u = \varepsilon f(u, u_t, u_x) \tag{7.3.34}$$

其退化问题的解为

$$u = a\cos(k_0x - \omega_0 t + \varPhi) \tag{7.3.35}$$

其中 a 和 $\varPhi$ 是常数，k_0 和 ω_0 有色散关系

$$\omega_0^2 = c^2k_0^2 + \lambda^2 \tag{7.3.36}$$

所以我们假设 (7.3.34) 的渐近展开为

$$u = a\cos\varphi + \varepsilon u_1(a,\varphi) + \cdots \tag{7.3.37}$$

上式的 a 是时间和位置的慢变函数，它满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) + \cdots \\ \frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon B_1(a) + \cdots\end{aligned} \tag{7.3.38}$$

(7.3.37) 中的 φ 是新的位相函数，它满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\omega_0 + \varepsilon C_1(a) + \cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= k_0 + \varepsilon D_1(a) + \cdots\end{aligned} \tag{7.3.39}$$

因而当 $\varepsilon = 0$ 时， φ 与 (7.3.35) 中的位相函数相同.

把 (7.3.37) — (7.3.39) 代入 (7.3.34), 利用色散关系 (7.3.36), 使两边 ε 同幂次的系数相等可得

$$\begin{aligned}\lambda^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + u_1\right) =& -2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1)\sin\varphi - 2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1)\cos\varphi \\ &+ f[a\cos\varphi, a\omega_0\sin\varphi, -ak_0\sin\varphi]\end{aligned} \tag{7.3.40}$$

把 f 展开为 Fourier 级数,

$$f = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(a)\sin n\varphi + g_n(a)\cos n\varphi] \tag{7.3.41}$$

为了消去长期项，保证 u_1 为周期解，所以 (7.3.40) 式中 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的系数必须为零,

$$\begin{aligned}2\omega_0 A_1 + 2C^2 k_0 B_1 &= f_1(a) \\ 2a(\omega_0 C_1 + C^2 k_0 D_1) &= g_1(a)\end{aligned} \tag{7.3.42}$$

把 (7.3.38)(7.3.37) 代入 (7.3.42), 引入群速度 $C_g = d\omega_0/dk_0$ 及 $\phi = \varphi - k_0x + \omega_0 t$, 上式变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} + C_g\frac{\partial a}{\partial x} &= \varepsilon f_1(a)/2\omega_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + C_g\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \varepsilon g_1(a)/2a\omega_0\end{aligned} \tag{7.3.43}$$

上式说明除了一个小的强迫项修正因子之外振幅随时间和空间的变化按群速度传播. 从 (7.3.40) 可以解得

$$u_1 = \frac{g_0(a)}{\lambda^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_n(a)\sin n\varphi + g_n(a)\cos n\varphi}{\lambda^2(1-n^2)} \tag{7.3.44}$$

下面我们简单介绍平均变分法, 它是变分法和平均法的结合, 是由 Whitham 等人在 60 年代发展起来的, 已被应用于流体和等离子体中的流动现象和稳定性问题.

我们还是以 Duffing 方程 (7.2.1) 为例, 简述平均变分法的主要思想. Duffing 方程 (7.2.1) 等价于下述泛函 J 的驻留值问题

$$J = \int_0^t L(\dot{y}, y)dt \tag{7.3.45}$$

其中

$$L(\dot{y}, y) = \frac{1}{2}[(\frac{dy}{dt})^2 - y^2 - \frac{1}{2}\varepsilon y^4] \tag{7.3.46}$$

我们假定 Duffing 方程的解为

$$y = a\cos\varphi\,, \qquad \varphi = t + \theta \tag{7.3.47}$$

因为 a 和 θ 为缓变函数, 即 $da/dt = O(\varepsilon), d\theta/dt = O(\varepsilon)$, 所以在与整个时间相比很短的每一个周期中可以认为 a 和 θ 是常数. 于是

$$\int_0^t Ldt = \sum_{j=1}^{N}\int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} Ldt + \int_{2N\pi}^{t} Ldt \approx \sum_{j=1}^{N} 2\pi\overline{L}_j + \int_{2N\pi}^{t}\overline{L}_{N+1}dt = \int_0^t \overline{L}dt \tag{7.3.48}$$

其中 $t-2N\pi<2\pi$,

$$\overline{L}_j=\frac{1}{2\pi}\int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi}Ldt \tag{7.3.49}$$

$\overline{L}$ 是 L 在一个周期内的平均值. (7.3.48) 式意味着用泛函 (7.3.45) 的 Lagrange 函数在每一个周期内的平均值来代替泛函 (7.3.45) 的函数. 这就是平均变分法名称的由来及主要思想. 一般说来, 泛函 (7.3.45) 的驻留值对应的 Euler 方程比较复杂. 但假定 a,θ 缓变, 用 Lagrange 函数在一个周期中的平均值代替之后, 其对应的 Euler 方程比较简单, 容易求解, 这就是平均变分法的优点.

对于 Duffing 方程

$$\begin{aligned}2L=&a^2\sin^2\varphi-2a\dot{a}\sin\varphi\cos\varphi+2a^2\dot{\theta}\sin^2\varphi\\&-a^2\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon a^4\cos^4\varphi+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{7.3.50}$$

按 (7.3.49) 算得的平均值为

$$\overline{L}=\frac{1}{2}[a^2\dot{\theta}-\frac{3}{16}\varepsilon a^4] \tag{7.3.51}$$

对平均的 Lagrange 函数求驻留值, 其相应的 Euler 方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{L}}{\partial a}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{a}})=\frac{\partial\overline{L}}{\partial a}=0\\&\frac{\partial\overline{L}}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\theta}})=-\frac{d}{dt}(\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\theta}})=0\end{aligned} \tag{7.3.52}$$

即

$$\begin{aligned}&a\dot{\theta}-\frac{3}{8}\varepsilon a^3=0\\&a\dot{a}=0\end{aligned} \tag{7.3.53}$$

因而有

$$a=a_0+O(\varepsilon^2)\ ,\ \theta=[\frac{3}{8}\varepsilon a^2+O(\varepsilon^2)]t+\theta_0 \tag{7.3.54}$$

利用初始条件得到首项解为

$$y = a_0 \cos[(1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2)t] \tag{7.3.55}$$

与前面的结果一致.

7.4 多重尺度法

多重尺度法是从 50 年代末期、60 年代初期开始发展起来的，现在它已是奇异摄动理论中应用最广泛的一种方法，被应用于物理、工程和应用数学等各种领域的问题中。

多重尺度法的主要思想是把奇异摄动问题中的各种时间尺度（空间尺度）都当作问题的独立变量，把对时间（空间）的导数写为对各种时间尺度的多元复合函数的导数，然后通过摄动展开用消去长期项的条件来确定各阶的解.

多重尺度法有二种不同的变型. 在以时间为自变量的问题中若有 $M+1$ 个不同的时间尺度

$$T_m = \varepsilon^m t \qquad (m = 0, 1, \cdots, M) \tag{7.4.1}$$

则把所求的因变量看作为这 $M+1$ 个时间尺度的函数，并展开

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) &= \widetilde{y}(T_0, T_1, \cdots, T_M; \varepsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M} \varepsilon^m y_m(T_0, T_1, \cdots, T_M) + O(\varepsilon^{M+1}) \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

利用多元复合函数求导法则可得

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots \tag{7.4.3}$$

上式说明：导数形式地像应变量一样被展开为小参数的幂级数，因此，Sturrock 和 Nayfeh 称这种方法为导数展开法.

(7.4.2) 和 (7.4.3) 表明原来的常微分方程将转化为偏微分方程，(若原来就是偏微分方程，那么自变量增加了). 读者或许会想，这不是更复杂、更难求解了吗？但在下面的例子及许多实际问题中，情况并非如此。因为得到的偏微分方程都是消去了非线性项的比较简单的线性方程，很容易求解，而且高阶问题和退化问题的方程形式上相同，只不过多了非齐次项而已.

把 (7.4.2) 和 (7.4.3) 代入原来的方程，按照 ε 的幂次可得一系列确定 y_m 的方程组，用消去长期项或使后一阶解的奇性不比前一阶解更高的原则来确定解中包含各种时间尺度的任意函数. (7.4.2) 式展开到时间尺度 T_M 表明，它在 $t = O(\varepsilon^{-M})$ 之前有效，因此，$\varepsilon^m y_m$ 应该是 $\varepsilon^{m-1} y_{m-1}$ 的小量修正，即

$$\frac{y_m}{y_{m-1}} < \infty \quad (\text{对于所有的} T_0, T_1, \cdots, T_M) \tag{7.4.4}$$

这个条件并非意味 y_m 有界，只是说高阶近似并不比前一阶更奇异，它等价于消除长期项.

Cole 和 Kevorkian 引进了多重尺度法的第二个变型. 该方法引进了两个时间尺度：慢变时间和正常时间尺度，因而也叫做两变量展开法. 他们假定

$$y(t,\varepsilon) = \tilde{y}(\xi,\eta;\varepsilon) = \sum_{m=0}^{M} \varepsilon^m y_m(\xi,\eta) + O(\varepsilon^{M+1}) \tag{7.4.5}$$

其中

$$\xi = \varepsilon t\ , \quad \eta = (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots + \varepsilon^M\omega_M)t \tag{7.4.6}$$

ω_n 为常数. 这里 η 为正常时间加上一点小量修正，ξ 为慢变时间，比 η 更慢. 对时间的导数变为

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi} + (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon\omega_3 + \cdots + \varepsilon^M\omega_M)\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{7.4.7}$$

这两种变型都有推广形式如下

$$T_n = \delta_n(\varepsilon) g_n[\mu_n(\varepsilon) t]$$
$$\frac{d}{dt} = \sum_{n=0}^{M} \delta_n(\varepsilon)\mu_n(\varepsilon) g'_n[\mu_n(\varepsilon)t] \frac{\partial}{\partial T_n} \tag{7.4.8}$$

和

$$\xi = \mu(\varepsilon)t \ , \quad \eta = \sum_{n=0}^{M} \delta_n(\varepsilon) g_n[\mu_n(\varepsilon)t]$$
$$\frac{d}{dt} = \mu(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \xi} + (\sum_{n=0}^{M} \delta_n(\varepsilon)\mu_n(\varepsilon) g'_n[\mu_n(\varepsilon)t])\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{7.4.9}$$

其中 $\delta_n(\varepsilon)$ 和 $\mu_n(\varepsilon)$ 是二个渐近序列. 它们可适用于线性和非线性时间尺度.

下面我们分别举例说明这些方法的应用.

[**例 7.4.1**] 用导数展开法求 Duffing 方程 (7.2.1) 的渐近展开.

引进时间尺度

$$T_0 = t \ , \quad T_1 = \varepsilon t \ , \quad T_2 = \varepsilon^2 t \tag{7.4.10}$$

把未知函数展开为

$$y(t,\varepsilon) = u(T_0,T_1,T_2) = u_0(T_0,T_1,T_2)$$
$$+\varepsilon u_1(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0,T_1,T_2) \tag{7.4.11}$$

代入 (7.2.1), 可得 ε 各阶的递推方程

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \ , \quad u_0(0,0,0) = a_0 \ , \quad u_{0T_0}(0,0,0) = 0 \tag{7.4.12}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - u_0^3$$
$$u_1(0,0,0) = 0 \ , \quad u_{1T_0}(0,0,0) = -u_{0T_1}(0,0,0) \tag{7.4.13}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} + u_2 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 3u_0^2 u_1$$

$$u_2(0,0,0) = 0\ , \quad u_{2T_0}(0,0,0) = -u_{0T_2}(0,0,0) - u_{1T_1}(0,0,0) \tag{7.4.14}$$

(7.4.11) 的解为

$$u_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \overline{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0} \tag{7.4.15}$$

$$A(0,0) = \overline{A}(0,0) = \frac{1}{2}a_0 \tag{7.4.16}$$

把 (7.4.15) 代入 (7.4.13) 得 u_1 的方程

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = \{-[2i\frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2\overline{A}]e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0}\} + c.c. \tag{7.4.17}$$

其中 $c.c.$ 为前面项的复共轭. 为消去 (7.4.17) 式的长期项, 必须有

$$2i\frac{\partial A}{\partial T_1} + 3A^2\overline{A} = 0 \tag{7.4.18}$$

设

$$A = \frac{1}{2}a(T_1, T_2)e^{i\varphi(T_1,T_2)} \tag{7.4.19}$$

其中 a 和 φ 为实函数. 方程 (7.4.18) 和初始条件 (7.4.16) 化为

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0\ , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = \frac{3}{8}a^2 \tag{7.4.20}$$

$$a(0,0) = a_0\ , \quad \varphi(0,0) = 0 \tag{7.4.21}$$

上式的解为

$$\begin{aligned} &a = a(T_2)\ , \quad a(0) = a_0 \\ &\varphi = \frac{3}{8}a^2 T_1 + \varphi_0(T_2)\ , \quad \varphi_0(0) = 0 \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

消去长期项之后 (7.4.17) 的解为

$$u_1 = [B(T_1, T_2)e^{iT_0} + \frac{A^3}{8}e^{3iT_0}] + c.c. \tag{7.4.23}$$

从 u_1 的初始条件得到

$$B(0,0)=\overline{B}(0,0)=\frac{-1}{8}A^2(0,0)\overline{A}(0,0)=\frac{-1}{64}a_0^3 \qquad (7.4.24)$$

把 u_0,u_1 代入 (7.4.14) 得到二阶量 u_2 的方程

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2}+u_2=[-(2i\frac{\partial B}{\partial T_1}+3A^2\overline{B}+6A\overline{A}B+2i\frac{\partial A}{\partial T_2}-\frac{15}{8}A^3\overline{A}^2)e^{iT_0}$$
$$+(\frac{21}{8}A^4\overline{A}-3BA^2)e^{3iT_0}-\frac{3}{8}A^5e^{5iT_0}]+c.c. \qquad (7.4.25)$$

为避免产生长期项，需令

$$2i\frac{\partial B}{\partial T_1}+3A^2\overline{B}+6A\overline{A}B+2i\frac{\partial A}{\partial T_2}-\frac{15}{8}A^3\overline{A}^2=0 \qquad (7.4.26)$$

按照初始条件 (7.4.24), 令

$$B=\frac{-1}{8}A^2\overline{A} \qquad (7.4.27)$$

(7.4.26) 化为

$$2i\frac{\partial A}{\partial T_2}-\frac{21}{8}A^3\overline{A}^2=0 \qquad (7.4.28)$$

把 (7.4.19) 代入上式可得

$$\frac{\partial a}{\partial T_2}=0\ ,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial T_2}=-\frac{21}{256}a^4 \qquad (7.4.29)$$

按照 (7.4.22) 的初始条件，上式的解为

$$a=a_0\ ,\qquad \varphi=\frac{3}{8}a_0^2T_1-\frac{21}{256}a_0^4T_2 \qquad (7.4.30)$$

于是

$$A=\frac{a_0}{2}\exp[i(\frac{3}{8}a_0^2T_1-\frac{21}{256}a_0^4T_2)] \qquad (7.4.31)$$

一阶量的表示式为

$$u_1=[-\frac{1}{8}A^2\overline{A}e^{iT_0}+\frac{1}{8}A^3e^{3iT_0}]+c.c. \qquad (7.4.32)$$

(7.4.25) 式消去长期项后可得二阶量

$$u_2 = [De^{iT_0} - \frac{3}{8}A^4\overline{A}e^{3iT_0} + \frac{1}{64}A^5e^{5iT_0}] + c.c. \tag{7.4.33}$$

(7.4.14) 的初始条件化为

$$D(0,0) = \overline{D}(0,0) = \frac{23}{64}A^3(0,0)\overline{A}^2(0,0)$$

所以令

$$D = \frac{23}{64}A^3\overline{A}^2$$

得到

$$u_2 = [\frac{23}{64}A^3\overline{A}^2e^{iT_0} - \frac{3}{8}A^4\overline{A}e^{3iT_0} + \frac{1}{64}A^5e^{5iT_0}] + c.c. \tag{7.4.34}$$

综合以上结果，我们有

$$y(t,\varepsilon) = a_0\cos\omega t + \frac{1}{32}\varepsilon a_0^3(\cos 3\omega t - \cos\omega t) + \frac{1}{1024}\varepsilon^2 a_0^5(\cos 5\omega t - 24\cos 3\omega t + 23\cos\omega t) + O(\varepsilon^3) \tag{7.4.35}$$

其中

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2 - \frac{21}{256}\varepsilon^2 a_0^4 + O(\varepsilon^3) \tag{7.4.36}$$

这里的结果与 PLK 方法的结果 (7.2.12),(7.2.13) 完全相同.

[**例 7.4.2**]　试用两变量方法求下列 Van der Pol 方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt} \tag{7.4.37}$$

的一致有效展开式

设

$$u = u_0(\xi,\eta) + \varepsilon u_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi,\eta) + \cdots \tag{7.4.38}$$

其中的 ξ, η 由 (7.4.6) 式定义．把上式代入方程可得递推方程如下

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + u_0 = 0 \tag{7.4.39}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - u_0^2)\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \tag{7.4.40}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + u_2 = -2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}$$

$$+(1 - u_0^2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right) - 2u_0 u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \tag{7.4.41}$$

方程 (7.4.39) 的通解为

$$u_0 = A_0(\xi)\cos\eta + B_0(\xi)\sin\eta \tag{7.4.42}$$

把上式代入 (7.4.40) 得到

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + u_1 = [-2B_0' + (1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4})B_0]\cos\eta$$

$$+[2A_0' - (1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4})A_0]\sin\eta$$

$$+\frac{1}{4}(A_0^3 - 3A_0B_0^2)\sin 3\eta + \frac{1}{4}(B_0^3 - 3A_0^2B_0)\cos 3\eta \tag{7.4.43}$$

为消除上式的长期项，需令

$$-2B_0' + (1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4})B_0 = 0 \tag{7.4.44}$$

$$2A_0' - (1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4})A_0 = 0 \tag{7.4.45}$$

(7.4.45) 式乘以 A_0 减去 (7.4.44) 式乘以 B_0, 可得

$$(a^2)' - a^2(1 - \frac{1}{4}a^2) = 0 \tag{7.4.46}$$

其中 a 为零阶解的振幅

$$a^2 = A_0^2 + B_0^2 \tag{7.4.47}$$

用分离变量法积分 (7.4.46) 给出

$$a^2 = \frac{4}{1+(\frac{4}{a_0^2}-1)e^{-\xi}} \tag{7.4.48}$$

这里 a_0 是初始振幅. 若用振幅 a 和相位 ϕ 表示 A_0, B_0

$$A_0 = a\cos\phi\,, \quad B_0 = -a\sin\phi \tag{7.4.49}$$

从方程 (7.4.44) — (7.4.46) 可得

$$\phi' = 0\,, \quad \phi = \phi_0 = \text{const} \tag{7.4.50}$$

于是

$$u_0 = a\cos(\eta+\phi_0) \tag{7.4.51}$$

其中 a 由 (7.4.48) 表示. (7.4.51) 和平均法的结果一致.

消去长期项后 (7.4.43) 的解为

$$u_1 = A_1(\xi)\cos(\eta+\phi_0)+B_1(\xi)\sin(\eta+\phi_0)-\frac{a^3}{32}\sin 3(\eta+\phi_0) \tag{7.4.52}$$

把 u_0, u_1 代入 (7.4.41) 可得 u_2 应满足的方程

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial\eta^2}+u_2 = [-2B_1'+(1-\frac{1}{4}a^2)B_1-a''+2\omega_2 a+(1-\frac{3}{4}a^2)a'$$

$$+\frac{a^5}{128}]\cos(\eta+\phi_0)+[2A_1'-(1-\frac{3}{4}a^2)A_1]\sin(\eta+\phi_0)+NST \tag{7.4.53}$$

其中 NST 表示不会产生长期项的项. 消去上式的长期项可得

$$2B_1'-(1-\frac{1}{4}a^2)B_1 = 2\omega_2 a-a''+(1-\frac{3}{4}a^2)a'+\frac{a^5}{128} \tag{7.4.54}$$

$$2A_1'-(1-\frac{3}{4}a^2)A_1 = 0 \tag{7.4.55}$$

利用 (7.4.46) 式, 上面两个方程可化为

$$2B_1'-\frac{2a'}{a}B_1 = 2a(\omega_2+\frac{1}{16})-(\frac{7}{16}a^2-\frac{1}{4})a' \tag{7.4.56}$$

$$A_1'-(\frac{3a'}{a}-1)A_1 = 0 \tag{7.4.57}$$

它们的解是

$$B_1 = a(\omega_2 + \frac{1}{16})\xi - b_1 a + \frac{1}{8}a\ln a - \frac{7}{64}a^3 \tag{7.4.58}$$

$$A_1 = a_1 a^3 e^{-\xi} \tag{7.4.59}$$

其中 a_1, b_1 是常数. 当 $t \to \infty$ 时, $\xi \to \infty, a \to 2$, 由 (7.4.58) 知 $B_1 \to \infty$, 使 $u_1/u_0 \to \infty$, 因而破坏了一致有效性. 因此,

$$\omega_2 = \frac{-1}{16} \tag{7.4.60}$$

所以 Van der Pol 方程的二阶近似为

$$\begin{aligned} u &= (a + \varepsilon a_1 a^3 e^{-\varepsilon t})\cos[(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2)t + \phi_0] \\ &-\varepsilon\{(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + b_1 a)\sin[(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2)t + \phi_0] \\ &+\frac{1}{32}a^3 \sin 3[(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2)t + \phi_0]\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.4.61}$$

其中 a 由 (7.4.48) 式表示之.

一般的说, 适当选择两个变量可以得到和导数展开法相同的结果. 如果问题中含物理本质的时间尺度多于两个, 那么两变量展开自然就不合适了. 导数展开法和两变量展开法都只能应用于波型问题, 它们不能用于不稳定情形 (弱不稳定除外). 在双曲型方程中, 这两种方法对于初始条件可以表示为有限个正弦波叠加的色散波是有效的. 对于下述的非色散波问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon u^2 \\ &u(x,0) = f(x)\,, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{7.4.62}$$

即使 $f(x) = \cos x$ 这样简单的函数, 这两种方法都不能给出一个一致有效解. 一般的说非色散双曲方程可以用 PLK 方法得到一致有效解.

多重尺度法是目前应用最多、适用范围最广的方法. 对于 PLK 方法和平均方法能处理的问题, 也可以利用多重尺度法得到它们的一致有效解. 对于 PLK 方法不能处理的含有阻尼的问题, 多重尺度法也可应用. 它们的推广形式还可用于有边界层突变的问题, 请看下面的例子

[**例 7.4.3**] 试求变系数二阶方程

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+1)\frac{dy}{dx}+2y=0 \tag{7.4.63}$$

$$y(0)=\alpha\ ,\qquad y(1)=\beta \tag{7.4.64}$$

的一致有效解. 这个问题属于边界层型奇异摄动问题, 在 $x=0$ 处有一边界层. 该问题可用推广形式的多重尺度法求解.

设

$$\xi=x\ ,\quad \eta=\frac{1}{\varepsilon}G(x)\ ,\quad G(0)=0 \tag{7.4.65}$$

其中 G 为待定函数, 由于 $G(0)=0$, 当 $x\to0$ 时, $G(x)\to G'(0)x$, 因此 $\eta\to x/\varepsilon$. 以后讲边界层理论时可知 η 就是内部变量. 通常情况下我们把 $G(x)$ 按小参数 ε 展开 $G(x,\varepsilon)=g_0(x)+\varepsilon g_1(x)+\varepsilon^2g_2(x)+\cdots$

令

$$y(x,\varepsilon)=u(\xi,\eta,\varepsilon)=u_0(\xi,\eta)+\varepsilon u_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2u_2(\xi,\eta)+\cdots \tag{7.4.66}$$

于是方程 (7.4.63) 变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}G'^2[\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\frac{2\xi+1}{G'}\frac{\partial u}{\partial\eta}]+[2G'\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+G''\frac{\partial u}{\partial\eta}+(2\xi+1)\frac{\partial u}{\partial\xi}\\&\quad+2u]+\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}=0\end{aligned} \tag{7.4.67}$$

u_0 满足的方程为

$$\frac{\partial^2u_0}{\partial\eta^2}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial\eta}=0 \tag{7.4.68}$$

其中

$$\nu=\frac{2\xi+1}{G'(\xi)} \tag{7.4.69}$$

其解为

$$u_0=A_0(\xi)+B_0(\xi)e^{-\nu(\xi)\eta} \tag{7.4.70}$$

u_1 满足的方程为

$$G'^2[\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2}+\nu\frac{\partial u_1}{\partial\eta}]=-2G'\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}-G''\frac{\partial u_0}{\partial\eta}-2(\xi+1)\frac{\partial u_0}{\partial\xi}-2u_0$$

$$=-[(2\xi+1)A_0'+2A_0]-G'\nu\nu'B_0\eta e^{-\nu\eta}+[2G'(B_0\nu)'$$

$$-(2\xi+1)B_0'-(2-\nu G'')B_0]e^{-\nu\eta} \tag{7.4.71}$$

上式右端三项会产生正比于 $\eta,\eta^2e^{-\nu\eta}$ 和 $\eta e^{-\nu\eta}$ 的解项，使得当 $\eta\to\infty$ 时， $u_1/u_0\to\infty$，解不再一致有效，因此需令这三项都为零

$$(2\xi+1)A_0'+2A_0=0 \tag{7.4.72}$$

$$G'\nu\nu'B_0=0 \tag{7.4.73}$$

$$2G'(B_0\nu)'-(2\xi+1)B_0'-(2-\nu G'')B_0=0 \tag{7.4.74}$$

(7.4.72) 的解为

$$A_0=\frac{a_0}{2\xi+1}\qquad (a_0\text{ 为常数}) \tag{7.4.75}$$

由于一般情况下 $B_0\neq 0, G'$ 不能为零 (否则 $G=0$)，所以 (7.4.73) 变为

$$\nu'=0\ ,\qquad \nu=\frac{2\xi+1}{G'(\xi)}=\text{const}$$

不失一般性，取该常数为 1，因而

$$G=\xi^2+\xi \tag{7.4.76}$$

把上式代入 (7.4.74) 得

$$B_0' = 0 \,, \qquad B_0 = b_0 = \text{const} \tag{7.4.77}$$

所以

$$u_0 = \frac{a_0}{2\xi + 1} + b_0 \exp[-(\xi^2 + \xi)/\varepsilon] \tag{7.4.78}$$

由 (7.4.71) 解得

$$u_1 = A_1(\xi) + B_1(\xi)e^{-\eta} \tag{7.4.79}$$

决定 u_2 的方程为

$$(2\xi+1)^2(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_2}{\partial \eta}) = -[(2\xi+1)A_1' + 2A_1 + A_0''] + (2\xi+1)B_1'e^{-\eta} \tag{7.4.80}$$

为使 y_2/y_1 有界，需令

$$(2\xi + 1)A_1' + 2A_1 + A_0'' = 0 \,, \qquad B_1' = 0$$

于是

$$A_1 = \frac{a_1}{2\xi + 1} + \frac{2a_0}{(2\xi + 1)^3} \,, \quad a_1 = \text{const}$$

$$B_1 = b_1 = \text{const}$$

$$u_1 = \frac{a_1}{2\xi + 1} + \frac{2a_0}{(2\xi + 1)^3} + b_1 e^{-\eta}$$

最后 (7.4.63) 的解为

$$y = \frac{a_0}{2x + 1} + b_0 e^{-(x^2+x)/\varepsilon} + \varepsilon[\frac{a_1}{2x + 1} + \frac{2a_0}{(2x + 1)^3} + b_1 e^{-(x^2+x)/\varepsilon}] + O(\varepsilon^2) \tag{7.4.81}$$

由边界条件 (7.4.64) 定出

$$a_0 = 3b \,, \quad b_0 = a - 3b \,, \quad a_1 = \frac{-2}{3}b \,, \quad b_1 = \frac{-16}{3}b$$

上述结果与以后用边界层理论解得的结果一致.

推广形式可以应用于用导数展开法或两变量展开法处理的所有问题，并且可以应用于这两种方法失效的问题，例如需要非线性尺度的问题，甚至某些边界层型有突变的问题．但从上例我们看到运算较复杂，所以对于一般的问题还是导数展开法和两变量展开法更合适.

7.5 可解性条件

可解性条件是奇异摄动问题中的一个重要条件．许多著名的方程如 KdV 方程、立方 Schrödinger 方程等就是由此导出的．在解奇异摄动问题时我们通常得到一系列的递推方程，零阶问题通常是齐次的，而高阶问题往往是非齐次的．在某些情况下这样得到的非齐次方程可能无解，从而导致不相容性；在另一些情况下从非齐次方程中解得的高阶展开不是一致有效的，会产生长期项．为保证展开式一致有效，我们往往要对非齐次项强加一定的条件以消除其不相容性和非一致性．这些条件称为可解性条件或相容性条件、协调性条件、可积性条件等．对于单自由度的简单问题这些条件是容易看出来的，一般原则是非齐次项中不能包含齐次方程的解．对于互相耦合的多自由度系统来说消除长期项就不是一目了然的了．这一节里我们先讨论二阶常微分方程的可解性条件，并以 Duffing 方程为例来加以说明．然后以一个例子说明二个自由度系统的可解性条件，最后我们导出 KdV 方程.

[**例 7.5.1**]　考虑带一般非齐次边界条件的二阶非齐次线性常微分方程的可解性条件.

$$\begin{aligned} L(y) &= p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y \\ &= f(x)\ , \quad p_2(x) \neq 0\ , \quad a \le x \le b \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

$$y'(a) = r_{11}y(a) + r_{12}y(b) + \delta_1 \tag{7.5.2}$$

$$y'(b) = r_{21}y(a) + r_{22}y(b) + \delta_2 \tag{7.5.3}$$

先介绍伴随算子的概念. 我们称算子

$$L^*(u) \equiv (p_2u)'' - (p_1u)' + p_0u = [p_2\frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1)\frac{d}{dx} + (p_2'' - p_1' + p_0)]u \tag{7.5.4}$$

为 L 的伴随算子, 称方程 $L^*(u) = 0$ 为方程 $L(y) = 0$ 的伴随方程. 由 (7.5.4) 式知, 当

$$p_2' = p_1$$

时, $L^* = L$, 我们称算子 L 是自伴算子. 若方程 (7.5.1) 非自伴, 可以在两边乘一个函数 $p_2^{-1}e^{\int p_1p_2^{-1}dx}$, 使 (7.5.1) 成为自伴方程.

现在推导方程 (7.5.1) 的可解性条件. 对于方程 (7.5.1) 的解 y 和伴随方程 $L^*(u) = 0$ 的解 u, 成立 Green 恒等式

$$\int_a^b [uL(y) - yL^*(u)]dx = [p_2(uy' - u'y) + (p_1 - p_2')uy]\Big|_a^b \tag{7.5.5}$$

即

$$\int_a^b fudx = [p_2uy' + (p_1 - p_2')uy - p_2u'y]\Big|_a^b \tag{7.5.6}$$

对于齐次方程、齐次边界条件的情况, 即 $f = \delta_1 = \delta_2 = 0$ 的情况, (7.5.6) 的左端为零. 把边界条件 (7.5.2) 和 (7.5.3) 代入 (7.5.6) 可得

$$[r_{21}p_2u|_{x=b} - (r_{11}p_2 + p_1 - p_2')u|_{x=a} + p_2u'|_{x=a}]y(a)$$

$$-[r_{12}p_2u|_{x=a} - (r_{22}p_2 + p_1 - p_2')u|_{x=b} + p_2u'|_{x=b}]y(b) = 0 \tag{7.5.7}$$

我们这样选择 u 的边界条件, 使得上式永远成立, 即 $y(a)$ 和 $y(b)$ 的系数都为零. 按这种方式决定的边界条件与伴随方程一起叫做伴随系统. 对于自伴方程而言可得

$$u'(a) = r_{11}u(a) - r_{21}p_2(b)p_2^{-1}(a)u(b) \tag{7.5.8}$$

$$u'(b) = -r_{12}p_2(a)p_2^{-1}(b)u(a) + r_{22}u(b) \tag{7.5.9}$$

若

$$r_{21}p_2(b) = -r_{12}p_2(a) \tag{7.5.10}$$

则 u 的边界条件 (7.5.8), (7.5.9) 与 y 的边界条件 (7.5.2), (7.5.3) 相同. 伴随方程及其边界条件和原始的方程及其边界条件完全相同的系统称为自伴系统.

对于非齐次方程及非齐次边界条件的情况, 把边界条件 (7.5.2) 和 (7.5.3) 代入 (7.5.6) 可得

$$\begin{aligned}\delta_2 p_2 u|_{x=b} - \delta_1\, p_2 u|_{x=a} + [r_{21}p_2 u|_{x=b} - (r_{11}\, p_2 + p_1 - p_2')u|_{x=a}\\ + p_2 u'|_{x=a}]y(a) - [r_{12}p_2 u|_{x=a} - (r_{22}p_2 + p_1 - p_2')u|_{x=b}\\ + p_2 u'|_{x=b}]y(b) = \int_a^b f u dx\end{aligned}$$

选择 u 的边界条件使得上式中 $y(a), y(b)$ 的系数都为零, 即 u 为伴随系统的解, 因而得到 (7.5.1) — (7.5.3) 的可解性条件

$$\delta_2 p_2(b)u(b) - \delta_1 p_2(a)u(a) = \int_a^b f u dx \tag{7.5.11}$$

作为一个特例, 考察非齐次的 Sturm-Liouville 问题的可解性条件

$$(p(x)y')' + q(x)y - \lambda r(x)y = f(x) \tag{7.5.12}$$

$$\begin{aligned}y'(a) = r_{11}y(a) + r_{12}y(b)\\ y'(b) = r_{21}y(a) + r_{22}y(b)\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

且假定 $r_{21}p(b) = -r_{12}p(a)$, 因此 (7.5.12), (7.5.13) 是自伴系统. 若 λ 不是齐次问题的特征值, 即齐次问题只有平凡解, 则可解性条件 (7.5.11) 自动满足, 即对于任意的连续函数 $f(x)$, 非齐次问题有唯一解. 若 λ 是齐次问题的特征值, 即此时齐次问题有非零解, 那么按照

可解性条件 (7.5.11), 除非 $f(x)$ 与相应于特征值 λ 的特征函数 $u(x)$ 正交，即

$$\int_a^b f(x)u(x)dx = 0 \tag{7.5.14}$$

否则非齐次问题无解.

[**例 7.5.2**]　考虑带有初始条件的二阶常微分方程的周期解的可解性条件.

$$L(y) \equiv p_2(t)y''+p_1(t)y'+p_0(t)y = f(t)\ ,\ p_2 \neq 0\ ,\quad 0 \leq t < \infty \tag{7.5.15}$$

$$y(0) = a\ ,\qquad y'(0) = b \tag{7.5.16}$$

由于初始条件与上例的 (7.5.2), (7.5.3) 不同, 所以不能完全套用上例的结果. 但对于有周期解的情况 (假设周期为 2π), 二者非常相似. 用 0 和 2π 代替 Green 恒等式 (7.5.5) 中的 a 和 b. 由于有周期解，所以方程 (7.5.15) 中的系数也是周期的函数，于是 Green 恒等式 (7.5.5) 的右端为零、可解性条件为

$$\int_0^{2\pi} uL(y)dt = \int_0^{2\pi} uf dt = 0 \tag{7.5.17}$$

以 Duffing 方程 (7.2.1) 为例. 如 (7.2.2) 那样把 y 按小参数 ε 展开，按 (7.2.3) 引进时间变换，可得各阶的递推方程 (7.2.5) — (7.2.7). 退化问题的方程 (7.2.5) 为自伴方程，有二个基本解 $\cos\tau$ 和 $\sin\tau$, 所以高阶量方程的可解条件为:

$$\int_0^{2\pi} f_i(\tau)\cos\tau d\tau = 0 \tag{7.5.18}$$

$$\int_0^{2\pi} f_i(\tau)\sin\tau d\tau = 0 \tag{7.5.19}$$

由 (7.2.9) 知 $f_1=(2\omega_1-\frac{3}{4}a_0^2)a_0\cos\tau-\frac{1}{4}a_0^3\cos3\tau$, 所以可解性条件 (7.5.19) 自动满足, 而 (7.5.18) 给出

$$\omega_1=\frac{3}{8}a^2 \tag{7.5.20}$$

于是

$$y_1=\frac{1}{32}a^3(\cos3\tau-\cos\tau) \tag{7.5.21}$$

这些结果与前面 PLK 方法的结果一致.

事实上, 把 f_i 作 Fourier 展开, 除了 $\cos t$ 和 $\sin t$ 分量之外, 其余的成份均使可解性条件 (7.5.18), (7.5.19) 的积分为零. 为满足可解性条件, 只需 f_i 的 Fourier 展开式中的 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的系数为零即可. 这就是 PLK 方法中消去长期项的条件. 因此二者的结果完全相同.

Keller 和丁汝 (L. Ting) 对各阶摄动方程的非齐次项作加权积分, 权函数通常取伴随方程之解, 用以得到可解性条件. 他们用这种方法确定变形参数, 并把它称为改进的摄动法.

[例 7.5.3] 考虑二个自由度系统的非线性振动问题

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1+\dot{u}_2+2u_1&=2\varepsilon u_1u_2\\ \ddot{u}_2-\dot{u}_1+2u_2&=\varepsilon u_1^2\end{aligned} \tag{7.5.22}$$

我们引入多重尺度

$$T_0=t\,,\qquad T_1=\varepsilon t \tag{7.5.23}$$

且设

$$\begin{aligned}u_1&=u_{10}(T_0,T_1)+\varepsilon u_{11}(T_0,T_1)+\cdots\\ u_2&=u_{20}(T_0,T_1)+\varepsilon u_{21}(T_0,T_1)+\cdots\end{aligned} \tag{7.5.24}$$

各阶的递推方程如下

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u_{10}}{\partial T_0^2}+\frac{\partial u_{20}}{\partial T_0}+2u_{10}=0\\ &\frac{\partial^2u_{20}}{\partial T_0^2}-\frac{\partial u_{10}}{\partial T_0}+2u_{20}=0\end{aligned} \tag{7.5.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial T_0^2}+\frac{\partial u_{21}}{\partial T_0}+2u_{11}=-2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial T_0\partial T_1}-\frac{\partial u_{20}}{\partial T_1}+2u_{10}u_{20}\\
&\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial T_0^2}-\frac{\partial u_{11}}{\partial T_0}+2u_{21}=-2\frac{\partial^2 u_{20}}{\partial T_0\partial T_1}-\frac{\partial u_{10}}{\partial T_1}+u_{10}^2
\end{aligned}
\tag{7.5.26}
$$

我们寻找下列形式的解

$$
u_{10}=c_1e^{i\omega T_0}+c.c.\ ,\qquad u_{20}=c_2e^{i\omega T_0}+c.c. \tag{7.5.27}
$$

把上式人入 (7.5.25) 可得

$$
\begin{aligned}
&(2-\omega^2)c_1+i\omega c_2=0\\
&-i\omega c_1+(2-\omega^2)c_2=0
\end{aligned}
\tag{7.5.28}
$$

(7.5.28) 为 c_1,c_2 的线性齐次方程，因 c_1,c_2 不能全为零，所以

$$
\begin{vmatrix} 2-\omega^2 & i\omega \\ -i\omega & 2-\omega^2 \end{vmatrix}=(\omega^2-4)(\omega^2-1)=0 \tag{7.5.29}
$$

得到二组解

$$
\begin{aligned}
&\omega=1\ ,\qquad c_2=ic_1\\
&\omega=2\ ,\qquad c_2=-ic_1
\end{aligned}
\tag{7.5.30}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&u_{10}=[A_1(T_1)e^{iT_0}+A_2(T_1)e^{2iT_0}]+c.c.\\
&u_{20}=[iA_1(T_1)e^{iT_0}-iA_2(T_1)e^{2iT_0}]+c.c.
\end{aligned}
\tag{7.5.31}
$$

把上式代入 (7.5.26) 即得一阶量的方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial T_0^2}+\frac{\partial u_{21}}{\partial T_0}+2u_{11}=[-i(3A_1'+4A_2\overline{A}_1)e^{iT_0}\\
&\qquad +i(-3A_2'+2A_1^2)e^{2iT_0}]+c.c.+NST\\
&\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial T_0^2}-\frac{\partial u_{11}}{\partial T_0}+2u_{21}=[(3A_1'+2A_2\overline{A}_1)e^{iT_0}+(-3A_2'\\
&\qquad +A_1^2)e^{2iT_0}]+c.c.+NST
\end{aligned}
\tag{7.5.32}
$$

其中 $\overline{A}$ 为 A 的复共轭. 为消去上式中的长期项, 按照单自由度系统的做法, 需令 e^{iT_0}, e^{2iT_0}, 前面的系数为零, 那么得到二个未知数的四个方程, 因而是错误的. 在二个自由度系统中, 并不需要 e^{iT_0}, e^{2iT_0} 的系数为零. 我们寻找 (7.5.32) 如下形式的特解:

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= [P_1(T_1)e^{iT_0} + P_2(T_1)e^{2iT_0}] + c.c. \\
u_{21} &= [Q_1(T_1)e^{iT_0} + Q_2(T_1)e^{2iT_0}] + c.c.
\end{aligned} \tag{7.5.33}
$$

代入 (7.5.32) 得

$$
(P_1 + iQ_1)e^{iT_0} + (-2P_2 + 2iQ_2)e^{2iT_0} = -i(3A_1' + 4A_2\overline{A}_1)e^{iT_0}
$$

$$
+i(-3A_2' + 2A_1^2)e^{2iT_0}
$$

$$
(-iP_1 + Q_1)e^{iT_0} + (-2iP_2 - 2Q_2)e^{2iT_0} = (3A_1' + 2A_2\overline{A}_1)e^{iT_0}
$$

$$
+(-3A_2' + A_1^2)e^{2iT_0}
$$

于是得到二组方程

$$
\begin{aligned}
P_1 + iQ_1 &= -i(3A_1' + 4A_2\overline{A}_1) \\
-iP_1 + Q_1 &= 3A_1' + 2A_2\overline{A}_1
\end{aligned} \tag{7.5.34}
$$

$$
\begin{aligned}
-2P_2 + 2iQ_2 &= i(-3A_2' + 2A_1^2) \\
-2iP_2 - 2Q_2 &= -3A_2' + A_1^2
\end{aligned} \tag{7.5.35}
$$

(7.5.34) 是 P_1, Q_1 的线性方程组, 其系数行列式为零, 为使 P_1, Q_1 有解, 必须

$$
\begin{vmatrix} 1 & -i(3A_1' + 4A_2\overline{A}_1) \\ -i & 3A_1' + 2A_2\overline{A}_1 \end{vmatrix} = 0
$$

即

$$
A_1' = -A_2\overline{A}_1 \tag{7.5.36}
$$

类似地由 (7.5.35) 导出

$$
A_2' = \frac{1}{2}A_1^2 \tag{7.5.37}
$$

(7.5.36), (7.5.37) 即为使一阶量有解的可解性条件. 用 $A_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$, $A_2 = a_2 e^{i\varphi_2}$ 代入 (7.5.36), (7.5.37), 分开实部、虚部即可解得 A_1, A_2, 因而完全确定了首项解. 为节省篇幅, A_1, A_2 的求解过程从略. 有兴趣的读者可自行求解或参看 Nayfeh A.H. 著的《非线性振动》一书.

[**例 7.5.4**] 从一维 Boussinesq 方程

$$\begin{aligned} &\zeta_t + u_x + \varepsilon(\zeta u)_x = 0 \\ &\zeta_x + u_t + \varepsilon u u_x - \frac{K}{3}\varepsilon u_{xxt} = 0 \end{aligned} \tag{7.5.38}$$

出发, 导出著名的 KdV 方程. 这里 ζ 为波高, u 为质点速度, $\varepsilon \ll 1, K$ 为常数.

引入尺度 $x, t, \tau = \varepsilon t$. 把 ζ, u 按小量展开

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \cdots, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots$$

代入 (7.5.38) 得

$$\zeta_{0t} + u_{0x} = 0$$

$$\zeta_{0x} + u_{0t} = 0$$

其解为

$$u_0 = \zeta_0 = f(x - t, \tau), \quad \xi = x - t \tag{7.5.39}$$

一阶量为方程为

$$\begin{aligned} \zeta_{1t} + u_{1x} &= -(\zeta_0 u_0)_x - \zeta_{0\tau} = -2ff_\xi - f_\tau \\ u_{1t} + \zeta_{1x} &= -u_0 u_{0x} + \frac{K}{3}u_{xxt} - u_{0\tau} \\ &= -ff_\xi - \frac{K}{3}f_{\xi\xi\xi} - f_\tau \end{aligned} \tag{7.5.40}$$

我们寻找 ζ_1, u_1 的波形解, 即

$$\zeta_1 = g_1(\xi, \tau), \quad u_1 = g_2(\xi, \tau)$$

代入 (7.5.40) 得到

$$\begin{aligned} -g_{1\xi}+g_{2\xi} &= -2ff_{\xi}-f_{\tau} \\ g_{1\xi}-g_{2\xi} &= -ff_{\xi}-\frac{K}{3}f_{\xi\xi\xi}-f_{\tau} \end{aligned} \tag{7.5.41}$$

(7.5.41) 是 $g_{1\xi}, g_{2\xi}$ 的线性代数方程组，其系数行列式为零，为使 $g_{1\xi}, g_{2\xi}$ 有解，需令

$$\begin{vmatrix} -1 & -2ff_{\xi}-f_{\tau} \\ 1 & -ff_{\xi}-\frac{K}{3}f_{\xi\xi\xi}-f_{\tau} \end{vmatrix} = 0$$

即得著名的 KdV 方程

$$f_{\tau}+\frac{3}{2}ff_{\xi}+\frac{K}{6}f_{\xi\xi\xi}=0 \tag{7.5.42}$$

该方程有孤立波解

$$f=a\ \mathrm{sech}^2[\sqrt{\frac{3a}{4K}}(x-t-\frac{a}{2}\varepsilon t)] \tag{7.5.43}$$

7.6 边界层理论

对于最高阶导数乘以小参数 ε 的微分方程，其退化问题常引起偏微分方程的类型改变或微分方程的降阶，因而原来适定的定解条件变得不适定了，使得退化问题无解，或者说原方程的解在 $\varepsilon=0$ 时发生了性质的突变. 边界层理论和 WKB 理论为这类方程提供了求解渐近近似的摄动方法. 这种微分方程的解一般在 $\varepsilon\to 0$ 时形成剧变区. 如果该区的厚度随 ε 趋于零而趋于零，则称该区为边界层，可用边界层理论求其近似值. 如果该区的厚度当 $\varepsilon\to 0$ 时仍为有限大小，则必须用 WKB 理论求其近似值. 但 WKB 理论只适用于线性方程，而边界层理论可用于非线性情况. 对于线性方程来说，边界层理论只是 WKB 理论的一种特殊情况. 某些边界层型奇异摄动

问题也可用多重尺度方法求解，本章 7.4 节中例 7.4.3 已经说明. WKB 方法也已经在本书第五章作了介绍. 所以本节只介绍边界层理论，包括匹配渐近展开和复合展开式.

匹配渐近展开法是处理边界层型奇异摄动问题的主要方法. 该方法是由著名的流体力学家 Prandtl 奠定基础的. 1905 年，他在解大 Reynolds 数绕流物体的粘性流动流场时，把流场分为两个区域：远离物面的势流区和物面附近的薄的边界层. 在势流区他忽略流体的粘性，因而无粘的势流解适用. 在边界层内法向速度变化激烈，粘性起了重要的作用. 为此，他把法向坐标放大 $\sqrt{R}$ 倍 (R 为 Reynolds 数), 导出了边界层方程. 求出两个区域的解后，再把两个解匹配衔接起来，提出了著名的 Prandtl 匹配原理. 他得到的结果与实验相符合，有力地促进了航空事业的发展.

边界层型奇异摄动问题的解法也是如此. 在函数变化平缓的边界层以外的区域，用正则摄动法求出其外解，而在函数变化剧烈的边界层内把自变量放大，把原方程变为新自变量的方程，再用摄动展开求出内解，然后用匹配原理把内解和外解匹配起来.

边界层的位置是在求解过程中首先会碰到的问题. 在有些物理问题中边界层的位置是很清楚的，如粘性流体绕流物体时边界层在物体表面. 但在有些物理问题和数学问题中边界层的位置事先不太清楚，需要在问题求解过程中加以确定. 一般的说，为了内外解能够匹配，内解一般有指数衰减项. 若内解无衰减项，则该处无边界层.

引进适当的放大坐标是求解奇异摄动问题的一个基本技巧. 通过坐标放大可以分析边界层的精细结构. 钱伟长 (W.Z. Chien) 形象地把坐标放大比作放大镜和慢镜头. 坐标放大与边界层位置都需在问题求解过程中加以解决.

内外解的渐近序列也是要考虑的问题. 在简单的问题中，ε 的整数次幂是被经常采用的. 但在很多问题中，渐近序列往往不能事先确定，而需要在求解过程中逐阶确定. 例如，先确定零阶外解，

再根据外解及匹配原理确定内解的首项. 然后按照匹配原理及首项内、外解, 再考虑外解第二项的阶, 解出第二项外解后, 再依次确定内阶第二项的阶, 等等, 依次继续.

下面我们用一个例子具体说明如何用匹配渐近展开方法解边界层型奇异摄动问题.

[例 7.6.1] 试求方程

$$\varepsilon y''+y'+y=0\ ,\quad y(0)=a\ ,\ y(1)=b\ ,\ a\neq be \tag{7.6.1}$$

的解的一致有效渐近展开.

我们在例 7.1.4 中讲过这个问题. 按正则摄动方法求解的话, 其首项满足一个一阶常数微分方法 (7.1.30), 但却要满足两个边界条件, 因而其退化问题无解. 我们也介绍了 (7.6.1) 的精确解, 并从图 7.1.1 知, 函数 y 在 $x=0$ 附近变化剧烈, 有一个边界层. 现在我们用匹配渐近展开法来求解.

首先求解边界层区域外部的解, 称作外解, 记作 $y^{(o)}$. 外解的渐近展开式称作外展开式. 先求其首项 $y_0^{(o)}$. 按正则摄动理论, 把上式

$$y^{(o)}=y_0^{(o)}+O(\varepsilon)$$

代入 (7.6.1) 可得 $y_0^{(o)}$ 满足的方程

$$y_0^{\prime(o)}+y_0^{(o)}=0 \tag{7.6.2}$$

函数 y 有二个边界条件, 但 $y_0^{(o)}$ 满足的是一阶常微分方程, 只能满足一个边界条件. 又因为 $y_0^{(o)}$ 是边界层外部的解, 所以它只能满足边界层外面的边界条件, 即

$$y_0^{(o)}(1)=b \tag{7.6.3}$$

于是

$$y_0^{(o)}=be^{1-x} \tag{7.6.4}$$

若事先不知道边界层的位置，那么可求出其通解，待用下面的办法求出其边界层位置之后，再用相应的边界层外面的边界条件定出问题的解.

现在来求边界层内部的解，称为内解，记作 $y^{(i)}$. 内解的渐近展开式称作内展开式. 先求其首项 $y_0^{(i)}$. 为此，先要对自变量进行放大. 受精确解 (7.1.32) 及 (7.1.33) 的启发，我们引入放大变换

$$\xi = x/\varepsilon^{\lambda}, \quad \lambda > 0 \ \text{待求} \tag{7.6.5}$$

(若事先不知道边界层位置, 可引入变换 $\xi = (x-x_0)/\varepsilon^{\lambda}$, 其中 $x_0 = 0$ 或 1). 方程 (7.6.1) 变为

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\frac{d^2y}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\lambda}\frac{dy}{d\xi} + y = 0 \tag{7.6.6}$$

对于 λ 有三种情况.

(1) $\lambda > 1$. (7.6.6) 的第一项在 $\varepsilon \to 0$ 时远大于其它项，所以首项内解 $y_0^{(i)}$ 满足 $d^2y_0^{(i)}/d\xi^2 = 0$, 其解为 $y_0^{(i)} = A + B\xi$, 其中 A, B 为待定常数，由边界层内的边界条件及下面要讲到的匹配条件决定. 求出内解、外解之后，我们假定有一个内解、外解都有效的公共区域，因而在这个区域中内解和外解应该相等，两个渐近近似应具有相同的函数形式，即

$$\lim_{x\to 0} y_0^{(o)} = \lim_{\xi\to\infty} y_0^{(i)} \tag{7.6.7}$$

(因为对固定的非零的 x 来说，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\xi = \frac{x}{\varepsilon^{\lambda}} \to \infty$), 显然，现在求到的解 $y_0^{(o)}$ 与 $y_0^{(i)}$ 不满足 (7.6.7), 即无法匹配.

(2) $0 < \lambda < 1$, 方程 (7.6.6) 的第二项为主要项，首项内解满足 $y_0'^{(i)}(\xi) = 0, y_0^{(i)} = A$, 同样无法满足式 (7.6.7), 无法匹配.

(3) $\lambda = 1$, (7.6.6) 的主要项为前两项，首项内解满足 $y_0''^{(i)} + y_0'^{(i)} = 0$, 利用边界层内的边界条件 $y_0^{(i)}(0) = a$, 其解为 $a + A_0(e^{-\xi} - 1)$, 由匹配条件 (7.6.7), 可得 $A_0 = a - be$.

假如我们事先不知道精确解，不知道边界层在何处，而用 $\xi = x - x_0/\varepsilon^{-\lambda}$ 代替 (7.6.5) 进行放大变换，则其它情况均相同，只不过当 $x_0 = 1$ 时，$x - x_0 < 0$, 在边界层外缘 $\xi \to -\infty$, 因而 $\lambda = 1$ 时的 $y_0^{(i)}$ 的指数项为指数增加项，而不是指数衰减项，因而无法与外解用 (7.6.7) 式进行匹配．这正好说明在 $x = 1$ 处不可能有边界层，否则会导致内、外解无法匹配．一般的说，在内解中应有指数衰减项，不能有随内变量无限增长的项，否则将无法匹配．这也是判别该处有无边界层的一个基本准则．

综上所述，我们可知问题 (7.6.1) 的边界层在 $x = 0$ 处 (即使不知道精确解，通过上面的分析也能知道边界层的位置)，而内变量的放大为 $\xi = x/\varepsilon$, 即 (7.6.5) 式中的 $\lambda = 1$, 内部解为

$$y_0^{(i)} = a - A_0(1 - e^{-\xi}) \tag{7.6.8}$$

知道了边界层位置后，外解用边界层外的边界条件，内解用边界层内的边界条件．由匹配条件得 $A_0 = a - be$.

从上面的求解过程中我们知道求出外解、内解之后必须进行匹配，即要求在内、外解都有效的公共有效区内，两个渐近近似具有相同的函数形式．渐近匹配与拼接法有点相似．拼接法是在一个点处比较两个函数及其导数，多适用于可求得封闭形式解的情况；渐近匹配方法匹配的是微分方程的渐近近似而不是他们的精确解．匹配法是在一个区间上比较两个函数，且匹配区间的长度随摄动参数及匹配的精度而变化．

通常所用的匹配原理有三种．

1. Prandtl 匹配原理：

外解的内极限 = 内解的外极限

即

$$\lim_{x \to x_0} y^{(o)}(x, \varepsilon) = \lim_{\xi \to \infty} y^{(i)}(\xi, \varepsilon) \tag{7.6.9}$$

也可写为

$$[y^{(o)}]^{(i)} = [y^{(i)}]^{(o)} \tag{7.6.10}$$

Prandtl 匹配原理一般只适用于首项，用到高阶项可能会出问题．

2. Van Dyke (1964) 匹配原理

n 项外解的 m 项内展开 $=m$ 项内解的 n 项外展开

即

$$[\sum_{p=0}^{n}\delta_p(\varepsilon)y_p^{(o)}]_m^{(i)}=[\sum_{p=0}^{m}\Delta_p(\varepsilon)y_p^{(i)}]_n^{(o)} \tag{7.6.11}$$

这里等式左边指的是：取外解的前 n 项，写成内变量的形式再按小参数展开取其前 m 项．等式右边是：取内解的前 m 项，改写为外变量的形式然后按小参数 ε 展开取其前 n 项．

上述二种匹配原理都假定内、外解有公共有效区，但究竟内外解有无公共有效区呢？这就要用下述的 Kaplun 中间匹配原理来决定．

3. Kaplun (1957) 中间匹配原理

若函数的外展开为 $\sum\limits_{n=0}\delta_n(\varepsilon)y_n^{(o)}(x)$，内变量为 $x/\nu(\varepsilon)$，内展开为 $\sum\limits_{n=0}\Delta_n(\varepsilon)y_n^{(i)}(x/\nu(\varepsilon))$，中间变量为 $x_\eta=x/\eta(\varepsilon)$，$\mu_r(\varepsilon)$ 为一渐近序列，对于某个 $r=0,1,2,\cdots$ 存在着正整数 p,s 和函数 $\eta_1(\varepsilon)$，$\eta_2(\varepsilon)$ $(\nu(\varepsilon)\le\eta_1\ll\eta_2\le1)$，使得对所有满足 $\eta_1\ll\eta\ll\eta_2$ 的 η 有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ x_\eta\ \text{固定}}}\frac{1}{\mu_r(\varepsilon)}[\sum_{n=0}^{p}\delta_n(\varepsilon)y_n^{(o)}(\eta x_\eta)-\sum_{n=0}^{s}\Delta_n(\varepsilon)y_n^{(i)}(\eta x_\eta/\nu(\varepsilon)]=0 \tag{7.6.12}$$

则称内外展开式是匹配的，匹配到 $O(\mu_r(\varepsilon))$，它们的公共有效区为 $\eta_1\ll\eta\ll\eta_2$．对每个 r 来说，η_1 和 η_2 的形式各不相同，但 $\mu_r(\varepsilon)$ 随 ε 趋于零的阶数越高，η_1 变大而 η_2 变小，因而公共有效区越来越小，直至消失．

Fraenkel (1969) 比较了这些原则，指出：Van Dyke 匹配原则有时可能导致错误的结果，但较 Kaplun 原理易于应用．所以 Kaplun 匹配原理一般用于理论问题研究，而 Prandtl 和 Van Dyke 匹配原理已被广泛应用于力学、物理、化学和生物等各个领域．

下面我们继续求解例 7.6.1 的高阶项，并说明如何运用这些匹配原理．(7.6.1) 的解的外展开式为

$$y^{(o)}=\sum_{n=0}\varepsilon^n y_n^{(o)}$$

代入 (7.6.1) 可得 $y_n^{(o)}$ 满足的方程和边界条件

$$y_n'^{(o)}+y_n^{(o)}=-y_{n-1}''^{(o)}\ ,\quad y_n(1)=0\ (n\geq1) \tag{7.6.13}$$

其解为

$$y_1^{(o)}=be^{1-x}(1-x) \tag{7.6.14}$$

$$y_2^{(o)}=be^{1-x}[\frac{1}{2}(1-x)^2+2(1-x)] \tag{7.6.15}$$

内变量 $\xi=x/\varepsilon$, 内展开式为

$$y^{(i)}=\sum_{n=0}\varepsilon^n y_n^{(i)}(\xi)$$

代入 (7.6.1) 可得 $y_n^{(i)}$ 满足的方程和边界条件：

$$y_n''^{(i)}+y_n'^{(i)}=-y_{n-1}^{(i)}\ ,\quad y_n^{(i)}(0)=0\ ,\ n\geq1 \tag{7.6.16}$$

其解为

$$y_1^{(i)}=A_1(1-e^{-\xi})-[a-A_0(1+e^{-\xi})]\xi \tag{7.6.17}$$

$$y_2^{(i)}=A_2(1-e^{-\xi})-A_1(1+e^{-\xi})\xi+(a-A_0)(\frac{1}{2}\xi^2-\xi)+$$
$$+A_0(\frac{1}{2}\xi^2+\xi)e^{-\xi} \tag{7.6.18}$$

上面我们已对内、外解首项运用 Prandtl 匹配原理得到了解．下面我们对两项内、外解试用 Prandtl 匹配原理．

$$\lim_{x\to0}(y_0^{(o)}+\varepsilon y_1^{(o)})=be(1+\varepsilon)$$
$$\lim_{\xi\to\infty}(y_0^{(i)}+\varepsilon y_1^{(i)})=a-A_0+\varepsilon[A_1-(a-A_0)\xi]$$

为使 Prandtl 匹配原理 (7.6.9) 成立，必须使

$$A_0 = a - be\ ,\quad A_0 = a\ ,\quad A_1 = be$$

一般情况下上述三个等式不能同时满足，所以 Prandtl 匹配原理不适合于多项解的匹配，只适合于首项的匹配.

高阶近似的匹配可用 Van Dyke 匹配原理. 下面我们用它对三项内解和外解进行匹配

三项外解 $y^{(o)} \sim be^{1-x}\{1+\varepsilon(1-x)+\varepsilon^2[\frac{1}{2}(1-x)^2+2(1-x)]\}$

写成内变量 $be^{1-\varepsilon\xi}\{1+\varepsilon(1-\varepsilon\xi)+\varepsilon^2[\frac{1}{2}(1-\varepsilon\xi)^2+2(1-\varepsilon\xi)]\}$

取三项内展开 $be[1+\varepsilon(1-\xi)+\varepsilon^2(\frac{1}{2}\xi^2-2\xi+\frac{5}{2})]$

写回外变量 $be[(1-x+\frac{1}{2}x^2)+\varepsilon(1-2x)+\frac{5}{2}\varepsilon^2]$

三阶内解 $y^{(i)} \sim a - A_0 + A_0e^{-\xi} + \varepsilon\{A_1-(a-A_0)\xi$

$$-(A_1-A_0\xi)e^{-\xi}\}+\varepsilon^2\{A_2-A_1\xi+(a-A_0)(\frac{1}{2}\xi^2-\xi)$$

$$-[A_2+A_1\xi-A_0(\frac{1}{2}\xi^2+\xi)]e^{-\xi}\}$$

写成外变量 $a-A_0+\varepsilon[A_1-(a-A_0)\frac{x}{\varepsilon}]+\varepsilon^2[A_2$

$$-A_1\frac{x}{\varepsilon}+(a-A_0)(\frac{1}{2}\frac{x^2}{\varepsilon^2}-\frac{x}{\varepsilon})]+EST$$

取三项外展开 $(a-A_0)(1-x+\frac{1}{2}x^2)+\varepsilon[A_1(1-x)$

$$-(a-A_0)x]+A_2\varepsilon^2$$

式中 EST 指的是指数无穷小项，即含 $e^{-\xi}$ 或 $e^{-x/\varepsilon}$ 的项. 应用 Van Dyke 匹配原理 (7.6.11) 可得

$$A_0 = a - be\ ,\quad A_1 = be\ ,\quad A_2 = \frac{5}{2}be \tag{7.6.19}$$

下面我们再用 Kaplun 中间匹配原理对 (7.6.1) 的内、外解进行

匹配. 我们取 $\mu_r(\varepsilon)=\varepsilon^r$, 对于 $r=0$, 我们取 $p=s=1$, 为使

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}}[y_0^{(o)}(\eta x_\eta)-y_0^{(i)}(x_\eta\eta/\varepsilon)]\\ &=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}}\{be^{1-\eta x_\eta}-[(a-A_0)+A_0e^{-\eta x_\eta/\varepsilon}]\}\\ &=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}}[be+O(\eta)-(a-A_0)+EST]=0\end{aligned}$$

成立, 只要 $A_0=a-be$ 即可, 对 η 的要求为 $\varepsilon\ll\eta\ll1$. 这表明对首项匹配而言, 三种匹配方法所得结果均相同, 而 Kaplun 中间匹配原理还指出公共有效区比较宽, $\varepsilon\ll\eta\ll1$. 对于 $r=2$, 我们取 $p=s=3$

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}}\frac{1}{\varepsilon^2}\{y_0^{(o)}+\varepsilon y_1^{(o)}+\varepsilon y_2^{(o)}-y_0^{(i)}-\varepsilon y_1^{(i)}-\varepsilon^2y_2^{(i)}\}\\ &=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}}\frac{1}{\varepsilon^2}\{be[1-\eta x_\eta+\frac{1}{2}\eta^2x_\eta^2+O(\eta^3)]\\ &\quad+be[\varepsilon(1-2\eta x_\eta)+O(\varepsilon\eta^2)]+\frac{5}{2}be\varepsilon^2+O(\varepsilon^2\eta)\\ &\quad-(a-A_0)-\varepsilon[A_1-(a-A_0)\frac{\eta x_\eta}{\varepsilon}]-\varepsilon^2[A_2-A_1\frac{\eta x_\eta}{\varepsilon}\\ &\quad+(a-A_0)(\frac{1}{2}\frac{\eta^2x_\eta^2}{\varepsilon^2}-\frac{\eta x_\eta}{\varepsilon})]+EST\}=0\end{aligned}$$

得到 $A_0=a-be, A_1=be.A_2=\frac{5}{2}be, \varepsilon\ll\eta\ll\varepsilon^{2/3}$, 结果与 Van Dyke 匹配原理的结果相同. 公共有效区 $\varepsilon\ll\eta\ll\varepsilon^{2/3}$ 却比 $r=0$ 时小了很多.

问题 (7.6.1) 的解已经用内解、外解的形式表示出来了. 对于一个较小的 x 的具体的数, 究竟应该用外解呢? 还是用内解? 这是一个问题. 为此, 最好的解决办法是能给出一个在整个区间内对所有的 x 都一致有效的渐近展开式即所谓组合展开式. 最一般的办法是由内外展开式之和减去它们的公共项, 即

$$y=y^{(o)}+y^{(i)}-(y^{(o)})^{(i)}=y^{(o)}+y^{(i)}-(y^{(i)})^{(o)} \qquad (7.6.20)$$

上式后一个等号的成立是因为按照匹配原理 $(y^{(o)})^{(i)}=(y^{(i)})^{(o)}$. 在外部区域 (7.6.20) 式的 $y=y^{(o)}$, 而在内部区域为 $y=y^{(i)}$. 也可以

按下式作出组合解

$$y=y^{(o)}y^{(i)}/(y^{(o)})^{(i)}=y^{(o)}y^{(i)}/(y^{(i)})^{(o)}$$

不过，这种组合方法已经很少见了，因为它会使 $(y^{(o)})^{(i)}=0$ 的点很难处理.

按照 (7.6.20), 问题 (7.6.1) 的解的组合展开式为 (取三项内、外解)

$$\begin{aligned}y&=y^{(o)}+y^{(i)}-(y^{(o)})^{(i)}\\&=be^{1-x}\{1+\varepsilon(1-x)+\varepsilon^2[\frac{1}{2}(1-x)^2+2(1-x)]\}\\&\quad+\{(a-be)(1+x+\frac{1}{2}x^2)-\varepsilon[be-(a\\&\quad-2be)x]-\frac{5}{2}be\varepsilon^2\}e^{-x/\varepsilon}+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{7.6.21}$$

有的时候一个问题中有好几个边界层,它们可以在边界的一端,也可以在两端. 在力学中有它们对应的问题, 如两端固定的梁, 流体力学中绕流物体的热边界层和粘性边界层等等. 请看下面的例子.

[例 **7.6.2**]　试求边值问题

$$\varepsilon y'''-y'=1\ ,\quad y(0)=\alpha\ ;\ y'(0)=\beta\ ,\ y(1)=r\tag{7.6.22}$$

的解的一致有效渐近展开.

(7.6.22) 的退化问题为 $-y'=1$, 三阶微分方程降为一阶方程, 因而定解条件只须要一个, 另外两个边界条件须要放弃. 一般的说, 放弃几个边界条件就意味着该问题有几个边界层. 这二个边界层可能在一端也可能在两端, 因此, 在解外解时, 最好都不用这些边界条件.

我们寻找形式为

$$y^{(o)}=y_0^{(o)}+\delta_1(\varepsilon)y_1^{(o)}+\cdots\tag{7.6.23}$$

的外展开式, 式中 $\varepsilon\to0$ 时 $\delta_1(\varepsilon)\to0$. 在简单情况下 $\delta_1(\varepsilon)$ 可以取作 ε, 但对本例却不合适, 因此只能写为 $\delta_1(\varepsilon)$, 而且假定 $\delta_1(\varepsilon)\gg\varepsilon$,

其具体形式由匹配原理决定. 把 (7.6.23) 代入 (7.6.22) 可得

$$-y_0'^{(o)} = 1\ , \qquad y_0^{(o)} = -x + C_0$$
$$-y_1'^{(o)} = 0\ , \qquad y_1^{(o)} = C_1$$

所以

$$y^{(o)} = -x + C_0 + \delta_1(\varepsilon)C_1 + \cdots \tag{7.6.24}$$

其中 C_0, C_1 为任意常数, 由匹配原理决定.

假定 $x=0$ 处有边界层, 求其内展开式. 引入放大变换

$$\xi = x/\varepsilon^\lambda\ , \quad \lambda > 0$$

(7.6.22) 变为

$$\varepsilon^{1-3\lambda}\frac{d^3y^{(i)}}{d\xi^3} - \varepsilon^{-\lambda}\frac{dy^{(i)}}{d\xi} = 1 \tag{7.6.25}$$

若 $\lambda > \frac{1}{2}$, 上式的第一项为主要项, 其解为 $A\xi^2 + B\xi + C$, 随 $\xi \to \infty$ 而趋于 ∞, 没有衰减项, 不能与外界匹配. 若 $\lambda < \frac{1}{2}$, (7.6.25) 的第二项为主要项, 其解为常数, 一般情况下也无法匹配. 所以能与外界匹配的 $\lambda = \frac{1}{2}$, (7.6.25) 变为

$$\frac{d^3y^{(i)}}{d\xi^3} - \frac{dy^{(i)}}{d\xi} = \varepsilon^{1/2} \tag{7.6.26}$$

显然内展开的形式应为

$$y^{(i)} = y_0^{(i)}(\xi) + \sqrt{\varepsilon}y_1^{(i)}(\xi) + \cdots$$

代入 (7.6.26), 令 ε 的同次幂的系数相等, 有

$$\begin{aligned} y_0'''^{(i)} - y_0'^{(i)} &= 0 \\ y_1'''^{(i)} - y_1'^{(i)} &= 1 \end{aligned} \tag{7.6.27}$$

$x=0$ 处的边界条件为

$$y^{(i)}(0) = \alpha\ , \quad \left.\frac{dy^{(i)}}{dx}\right|_{x=0} = \varepsilon^{-1/2}\left.\frac{dy^{(i)}}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \beta$$

即

$$
\begin{aligned}
&y_0^{(i)}(0)=\alpha\ , \qquad \frac{dy_0^{(i)}}{d\xi}=0 \\
&y_1^{(i)}(0)=0\ , \qquad \frac{dy_1^{(i)}}{d\xi}=\beta
\end{aligned}
\tag{7.6.28}
$$

零阶内解为

$$y_0^{(i)}=a_0+a_1e^{-\xi}+a_2e^{\xi} \tag{7.6.29}$$

为使内、外解能匹配， $a_2=0$(否则 $y_0^{(i)}\to\infty$, 当 $\xi\to\infty$ 时). 由边界条件 (7.6.28) 定出： $a_1=0, a_0=\alpha$, 所以

$$y_0^{(i)}=\alpha \tag{7.6.30}$$

一阶内解的通解为

$$y_1^{(i)}=-\xi+b_0+b_1e^{-\xi}+b_2e^{\xi}$$

为使内外解能匹配，须令 $b_2=0$. 由边界条件得

$$y_1^{(i)}=-\xi+(1+\beta)(1-e^{-\xi}) \tag{7.6.31}$$

现在按 Van Dyke 匹配原理进行匹配 $(m=n=2)$.

两项外展开 $C_0-x+\delta_1(\varepsilon)C_1$

改写为内变量 $C_0-\varepsilon^{1/2}\xi+\delta_1(\varepsilon)C_1$

取二项内展开 $C_0-\varepsilon^{1/2}\xi+\delta_1(\varepsilon)C_1$ （因 $\delta_1(\varepsilon)$ 未知，先保留）

写为外变量 $C_0-x+\delta_1(\varepsilon)C_1$

两项内展开 $\alpha+\varepsilon^{1/2}[-\xi+(1+\beta)(1-e^{-\xi})]$

改写为外变量 $\alpha+\varepsilon^{1/2}[-\dfrac{x}{\varepsilon^{1/2}}+(1+\beta)-(1+\beta)e^{-x/\varepsilon^{1/2}}]$

取二项外展开 $\alpha-x+(1+\beta)\varepsilon^{1/2}$

因此可得

$$C_0=\alpha\ ,\ \ \delta_1(\varepsilon)=\varepsilon^{1/2}\ ,\ \ C_1=(1+\beta) \tag{7.6.32}$$

到此为止，外解 (7.6.24) 已完全确定了．按 (7.6.24), $y^{(o)}(1)=\alpha-1+(1+\beta)\varepsilon^{1/2}\neq r$, $x=1$ 处的边界条件还不满足，所以在 $x=1$

处还有一个边界层. 与 $x=0$ 处一样, 经过分析可知内变量为 $\zeta=(1-x)/\varepsilon^{1/2}$, 内解为

$$y^{(I)}=y_0^{(I)}+\sqrt{\varepsilon}y_1^{(I)}+\cdots=r+d_1(e^{-\zeta}-1)+\sqrt{\varepsilon}(\zeta+d_3(1-e^{-\zeta})]+\cdots$$

由 Van Dyke 匹配原理得

$$d_1=r-\alpha+1\ ,\quad d_3=1+\beta$$

最后可得组合展开式

$$\begin{aligned}y&=y^{(o)}+y^{(i)}+y^{(I)}-(y^{(I)})^{(o)}-(y^{(i)})^{(o)}\\&=\alpha-x+\varepsilon^{1/2}(1+\beta)+\alpha+\varepsilon^{1/2}[-\xi+(1+\beta)(1-e^{-\xi})]+\\&\quad+r+(r-\alpha+1)(e^{-\zeta}-1)+\varepsilon^{1/2}[\zeta+(1+\beta)(1-e^{-\zeta})]\\&\quad-\alpha+x-\varepsilon^{1/2}(1+\beta)-(\alpha-1)-\varepsilon^{1/2}(\zeta+1+\beta)+\cdots\\&=\alpha-x+(r-\alpha+1)e^{-\zeta}+\varepsilon^{1/2}(1+\beta)(1-e^{-\xi}-e^{-\zeta})+\cdots\end{aligned}\tag{7.6.33}$$

在本例中, 若直接对零阶外解应用边界条件 $y_0^{(o)}(0)=\alpha$, 所得结果与匹配结果相同. 一般而言, 若函数在某边界处有一个边界层, 那么外解必须在该处放弃一个边界条件. 对于首项解, 可以按照边界条件中所含导数阶数的高低, 从高到低, 依次放弃, 这对于简单的问题没有什么, 但对于比较复杂的问题, 能把外解先定下来就简单多了. 注意, 对于高阶项就不能这样做了. 另外, 本例外解中的 $\delta_1(\varepsilon)$, 不必等到匹配时再决定. 事实上, 求得内变量为 $x/\sqrt{\varepsilon}$ 后, 就可以想到 $\delta_1(\varepsilon)$ 应取为 $\sqrt{\varepsilon}$.

下面的例子告诉我们在一端也可以有两个边界层.

[**例 7.6.3**]　试求方程

$$\varepsilon^3y''+x^3y'+(x^3-\varepsilon)y=0\ ,\quad y(0)=\alpha\ ,y(1)=\beta\tag{7.6.34}$$

的解的一致有效渐近展开式.

由习题 (7.19) 可知, 该问题的边界层在 $x=0$ 处.

先求外解，由 (7.6.34) 可得

$$x^3 y_0'^{(o)} + x^3 y_0^{(o)} = 0\ ,\quad y_0^{(o)}(1) = \beta$$

$$y_0^{(o)} = \beta e^{1-x} \tag{7.6.35}$$

设内变量为 $\xi = x/\varepsilon^\lambda$, 代入 (7.6.34) 得

$$\varepsilon^{3-2\lambda}\frac{d^2y^{(i)}}{d\xi^2} + \varepsilon^{2\lambda}\xi^3\frac{dy^{(i)}}{d\xi} + (\varepsilon^{3\lambda}\xi^3 - \varepsilon)y^{(i)} = 0 \tag{7.6.36}$$

由于外解中忽略了第一项，所以在边界层中一般应把第一项包含进去．为此，对于能与外界匹配的情况为 $\lambda = 1$, 且

$$y_0''^{(i)} - y_0^{(i)} = 0\ ,\quad y_0^{(i)} = ae^{-\xi} \tag{7.6.37}$$

为了能匹配， be^ξ 已经从 $y_0^{(i)}$ 中略去了．按照 Prandtl 匹配原理，$\lim\limits_{x\to 0} y_0^{(o)} = \beta e$ 而 $\lim\limits_{\xi\to\infty} y_0^{(i)} = 0$, 不能进行匹配．为此，我们按 Kaplun 中间匹配原理，引入中间变量 $x_\eta = x/\eta, \varepsilon \ll \eta \ll 1$, 进行中间匹配．

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}} (\beta e^{1-x} - \alpha e^{-\xi})\\ =\ &\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x_\eta\ 固定}} [\beta e(1 - \eta x_\eta + O(\eta^2)) - \alpha e^{-\eta x_\eta/\varepsilon}] = \beta e \neq 0\end{aligned}$$

这说明这二个解没有公共有效区，不能匹配．实际上，该问题在 $x = 0$ 附近还有一个边界层，即在 $x = 0$ 处有二个边界层．而且第二个边界层的厚度比 ε 要大，它介于两个有效区之间，与这两个有效区都有公共的有效区．

现在回过头来仔细分析一下 (7.6.36)．显然，方程中任何单独的一项作为主项所得的解均不能与外解进行匹配．那么让我们来看看任何两项作为主项的情况．第一第二项同阶 ($\lambda = 3/4$) 和第一第三项同阶 ($\lambda = 3/5$) 时，主项为 $y = 0$, 平凡解显然不能匹配．第一第四项同阶时即为 (7.6.37), 也不能匹配．事实上这是可以预见到的，

因为 (7.6.37) 中的两项正是方程 (7.6.34) 在求解时略去的两项，方程 (7.6.37) 并不包括任何与外解有关的项，这样 (7.6.37) 与外解变得毫不相干，自然也就无法匹配．第二、第三项同阶时即为外解的方程．第三、第四项同阶 ($\lambda = 1/3$) 时，主项为 $dy/d\xi = 0, y = \alpha$ 也不能与外解匹配． (7.6.36) 的第二、第四项同为该方程的主项时，还可以得到一个可以匹配的解．此时 $\lambda = 1/2$, 确实，其边界层厚度 $\varepsilon^{1/2}$ 比 ε 要大．令 $\zeta = x/\varepsilon^{1/2}$, 可得首项方程

$$\zeta^3 y_0'^{(I)} - y_0^{(I)} = 0$$

其解为

$$y_0^{(I)} = de^{-1/2\zeta^2} \tag{7.6.38}$$

d 为常数由 $y^{(I)}$ 与 $y^{(o)}$ 匹配决定，即

$$\lim_{x\to 0} y_0^{(o)} = \lim_{\zeta\to\infty} y_0^{(I)}, \quad \beta e = d \tag{7.6.39}$$

而 $y^{(I)}$ 与 $y^{(i)}$ 的匹配则自动满足，即

$$\lim_{\zeta\to 0} y_0^{(I)} = \lim_{\xi\to\infty} y_0^{(i)} = 0$$

由 (7.6.20) 知边界层型奇异摄动问题的组合解可以写为

$$y = y^{(o)} + [y^{(i)} - (y^{(o)})^{(i)}] = y^{(o)} + [y^{(i)} - (y^{(i)})^{(o)}]$$

上式可以看作为两项 $F(x,\varepsilon) = y^{(o)}$ 与 $G(\xi,\varepsilon) = y^{(i)} - (y^{(o)})^{(i)}$ 之和，即

$$y(x,\varepsilon) = F(x,\varepsilon) + G(\xi,\varepsilon) \tag{7.6.40}$$

受此启发，有人觉得先求外解、再求内解、然后匹配，给出组合展开这样的匹配渐近展开过程太复杂，他们直接把解写为 (7.6.40) 的形式，而且认为它们处处有效、满足所有的边界条件．他们认为这样更快捷、方便．这就是所谓复合展开法．

复合展开最早由钱伟长 (W.Z. Chien) 教授 (1948) 提出并应用之. 他在 1948 年在解薄板大挠度问题时就已经应用了这种技术, 比国外最早应用这种方法的 Latta 还早了 3 年. 他们把解写为

$$y = f(x,\varepsilon) + \exp(-G(x)/\varepsilon) g(x,\varepsilon) \tag{7.6.41}$$

甚至直接写作

$$\begin{aligned} y &= f(x,\varepsilon) + \exp(-x/\varepsilon) g(x,\varepsilon) \\ &= \sum_{n=0} \varepsilon^n f_n(x,\varepsilon) + \exp(-x/\varepsilon) \sum_{n=0} \varepsilon^n g_n(x,\varepsilon) \end{aligned} \tag{7.6.42}$$

很显然, 这里 f 为外解, 而内解则是两部分的和.

我们再次以 (7.6.1) 为例来说明此法的应用.

假设 (7.6.1) 有 (7.6.42) 形式的一致有效展开, 把 (7.6.42) 代入 (7.6.1), 对所有的 n, 令 ε^n 和 $\varepsilon^n e^{-x/\varepsilon}$ 的系数为零可得递推方程

$$f_0' + f_0 = 0\,, \quad g_0' - g_0 = 0 \tag{7.6.43}$$

$$f_1' + f_1 = -f_0''\,, \quad g_1' - g_1 = g_0'' \tag{7.6.44}$$

$$f_2' + f_2 = -f_1''\,, \quad g_2' - g_2 = g_1'' \tag{7.6.45}$$

边界条件是

$$f_0(1) = b\,, \quad f_0(0) + g_0(0) = a \tag{7.6.46}$$

$$f_n(1) = 0\,, \quad f_n(0) + g_n(0) = 0 \quad (n \geq 1) \tag{7.6.47}$$

上述边界条件忽略了含指数的小量 $e^{-1/\varepsilon} g_n(1)$. 这些方程满足相应边界条件的解分别为

$$f_0 = b e^{1-x}\,, \qquad g_0 = (a - be)e^x \tag{7.6.48}$$

$$f_1 = b(1-x)e^{1-x}\,, \quad g_1 = [-be + (a - be)x]e^x \tag{7.6.49}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} b(1-x)(5-x)e^{1-x}\,, \quad g_2 = [\frac{-5}{2} be + (2a - 3be)x + \frac{1}{2}(a - be)x^2]e^x \tag{7.6.50}$$

于是展开式 (7.6.42) 成为

$$
\begin{aligned}
y = \; & b[1+\varepsilon(1-x)+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-x)(5-x)]e^{1-x}+\{a-be \\
& +\varepsilon[-be+(a-be)x]+\varepsilon^2[\frac{-5}{2}be+(2a-3be)x \\
& +\frac{1}{2}(a-be)x^2]\}e^{x-x/\varepsilon}+O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{7.6.51}
$$

上式与匹配渐近展开的结果 (7.6.21) 在形式上略有差别，但它们的外部展开 (x 固定，$\varepsilon \to 0$) 和内部展开 ($\xi = x/\varepsilon$ 固定，$\varepsilon \to 0$) 是完全相同的.

Bromberg 等人直接把解写成 (7.6.40) 的形式，并且认为 G 在内部匹配之外是可以忽略的，即 $\xi \to \infty$ 时，$G(\xi,\varepsilon) \to 0$ 所以对 (7.6.40) 取外部极限时

$$
y^{(o)} = F(x,\varepsilon) = F_0(x)+\varepsilon F_1(x)+\varepsilon^2 F_2(x)+\cdots \tag{7.6.52}
$$

它满足用外部变量表示的原来的微分方程及边界层外的边界条件. 内部变量为 $\xi = x/\varepsilon$, 对 (7.6.40) 取内部极限时

$$
\begin{aligned}
y^{(i)}(\xi,\varepsilon) & = F^{(i)}+G \\
& = F_0(0)+G_0(\xi)+\varepsilon[F_0'(0)\xi+F_1(0)+G_1(\xi)] \\
& \quad +\varepsilon^2[\frac{1}{2}F_0''(0)\xi^2+F_1'(0)\xi+F_2(0)+G_2(\xi)]+\cdots
\end{aligned} \tag{7.6.53}
$$

它满足用内部变量表示的原来的微分方程及边界层的边界条件.

我们还以 (7.6.1) 为例来说明此方法的运用.

由 (7.6.52) 知 F 为外部展开式，所以可用正则摄动的办法求得它的递推方程和边界条件

$$
F_0'+F_0=0 \quad F_0(1)=b \tag{7.6.54}
$$

$$
F_n'+F_n=-F_{n-1}'' \quad F_n(1)=0 \quad (n\geq 1) \tag{7.6.55}
$$

为了确定 G 的方程，先把 (7.6.1) 化为内部变量的方程

$$
\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{dy}{d\xi}+\varepsilon y=0
$$

把 (7.6.53) 代入上式，令 ε 的同次幂系数相等有

$$G_0'' + G_0' = 0 \tag{7.6.56}$$

$$G_1'' + G_1' = -G_0 - F_0'(0) - F_0(0) \tag{7.6.57}$$

$$G_2'' + G_2' = -G_1 + [F_0'(0) + F_0''(0)]\xi - F_0''(0) - F_1'(0) - F_1(0) \tag{7.6.58}$$

它们的边界条件分别为

$$F_0(0) + G_0(0) = a\ , \quad F_n(0) + G_n(0) = 0 \ \ (n \geq 1) \tag{7.6.59}$$

$$G_n(\infty) = 0 \quad (n \geq 0) \tag{7.6.60}$$

(7.6.54), (7.6.55) 的解为

$$\begin{aligned} &F_0 = be^{1-x} \quad , F_1 = b(1-x)e^{1-x} \\ &F_2 = \frac{1}{2}b(1-x)(5-x)e^{1-x} \end{aligned}$$

G 的各阶解为

$$\begin{aligned} &G_0 = (a-be)e^{-\xi} \quad , G_1 = [(a-be)\xi - be]e^{-\xi} \\ &G_2 = [\frac{1}{2}(a-be)\xi^2 + (a-2be)\xi - \frac{5}{2}be]e^{-\xi} \end{aligned}$$

所得结果与匹配渐近展开式 (7.6.21) 完全相同.

复合展开法省去了繁杂的匹配过程，是它的优点. 在进行复合展开时，对问题的内部变量及物理特征需要有充分的了解. 对于非线性问题，用 (7.6.41) 或 (7.6.42) 的展开形式，可能会产生各种复杂情况，而且求解时可能需要一些专门函数的知识，而用 (7.6.40) 形式的展开时情况可能会好一些.

7.7 非线性方程的例子

非线性方程的边界层很复杂，其位置及厚度往往也与边界条件相联系. 处理这类问题需要特别小心. 另外，在处理非线性方程的

内解时，除了把自变量放大以外，其函数的首项往往不是 ε^0，而是从 ε 的某一次幂开始，这也须要特殊注意. 本节只是举一个模型方程的例子以说明这些复杂性.

例 7.7.1 试求非线性方程

$$\varepsilon y'' + yy' - y = 0\ , \quad y(0) = A\ ,\ y(1) = B \tag{7.7.1}$$

的解的一致有效渐近展开式.

先考虑外解 $y^{(o)}$，其首项满足

$$y_0^{(o)}(y_0'^{(o)} - 1) = 0$$

其解为

$$y_0^{(o)} = 0 \quad 和 \quad y_0^{(o)} = x + C \tag{7.7.2}$$

其满足左、右边界条件（一般不能同时满足）的解分别为

$$y_{0L}^{(o)} = x + A \tag{7.7.3}$$

$$y_{0R}^{(o)} = x + B - 1 \tag{7.7.4}$$

现在考虑内解. 内变量为

$$\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon^\lambda}$$

其中 x_0 为边界层的位置. 外解 (7.7.2) 的内极限为

$$C + x_0 + \varepsilon^\lambda \xi \tag{7.7.5}$$

若 $C + x_0 \neq 0$，为使内解、外解能匹配，则内解的首项为 ε^0 阶. 用内变量表示时方程 (7.7.1) 变为

$$\varepsilon^{1-2\lambda} y''^{(i)}(\xi) + \varepsilon^{-\lambda} y^{(i)} y'^{(i)}(\xi) - y^{(i)}(\xi) = 0 \tag{7.7.6}$$

可知只有 $\lambda = 1$ 时 (7.7.6) 才有可与外解匹配的解. 其首项 $y_0^{(i)}$ 满足方程

$$y_0''^{(i)}(\xi) + y_0^{(i)} y_0'^{(i)}(\xi) = 0 \tag{7.7.7}$$

上式的首次积分为

$$y_0'^{(i)}(\xi)+\frac{1}{2}y_0^{(i)^2}=C \tag{7.7.8}$$

若 $C<0$, 上式的积分为 $\mathrm{tg}\xi,\mathrm{ctg}\xi$ 形式，当自变量 $\xi\to\infty$ 时， $y_0^{(i)}$ 没有极限，不能与外解匹配. 为使内、外解能匹配，必须 $C>0$. 设 $C=\frac{1}{2}\beta^2$,(7.7.8) 的解为

$$y_0^{(i)}(\xi)=\beta\mathrm{th}\frac{\beta}{2}(\xi+K) \tag{7.7.9}$$

或

$$y_0^{(i)}(\xi)=\beta\mathrm{cth}\frac{\beta}{2}(\xi+K) \tag{7.7.10}$$

常数 β 和 K 由边界条件和匹配决定. $y_0^{(i)}(\xi)$ 的渐近特性如表 7.7.1 所示.

表 7.7.1

	$y_0^{(i)}=\beta\mathrm{th}\frac{\beta}{2}(\xi+K)$	$y_0^{(i)}=\beta\mathrm{cth}\frac{\beta}{2}(\xi+K)$
$\xi\to+\infty$	$\lvert y_0^{(i)}\rvert<\beta$， $y_0^{(i)}\uparrow\beta>0$	$y_0^{(i)}>\beta$， $y_0^{(i)}\downarrow\beta>0$
$\xi\to-\infty$	$\lvert y_0^{(i)}\rvert<\beta$， $y_0^{(i)}\downarrow-\beta<0$	$y_0^{(i)}<-\beta$， $y_0^{(i)}\uparrow-\beta$

若 (7.7.5) 中的 $C+x_0=0$, 为使内、外解能匹配，内解的首项应为 ε^λ 阶. 这种情况我们下面再分析.

现在分析边界值 A 、 B 的各种情况.

1. $A=B-1$

问题 (7.7.1) 没有边界层而有精确解

$$y=x+A=x+B-1 \tag{7.7.11}$$

2. $A>B-1>0$

设边界层在 $x=1$ 处，则外解用 $y_{0L}^{(o)}$. 按照内变量的定义 $\xi=(x-x_0)/\varepsilon^\lambda$, 在边界层外缘 $\xi\to-\infty$, 由表 7.7.1, $y_0^{(i)}\to-\beta<0$

而外解 $y_{0L}^{(o)}(1)=A+1>0$, 因而无法匹配，所以边界层不可能在 $x=1$.

设边界层在 $x=0$ 处，则外解为 $y_{0R}^{(o)}, y_{0R}^{(o)}(0)=B-1>0$. 在边界层外缘 $\xi\to\infty, y_0^{(i)}\to\beta$. 由匹配原理 $\beta=B-1$. 内解应从 A 下降至 $y_0^{(i)}(\infty)=\beta=B-1$, 所以内解为

$$y_0^{(i)}(\xi)=(B-1)\mathrm{cth}\frac{B-1}{2}(\xi+K) \qquad (7.7.12)$$

K 由下述边界条件决定

$$y_0^{(i)}(0)=A=(B-1)\mathrm{cth}\frac{B-1}{2}K \qquad (7.7.13)$$

所以首项一致有效展开为

$$y=x+(B-1)\mathrm{cth}\frac{B-1}{2}(\frac{x}{\varepsilon}+K)+O(\varepsilon) \qquad (7.7.14)$$

其中 K 由 (7.7.13) 决定.

对于 $B<A+1<0$ 的情况可类同讨论，只不过 $x_0=1$ 而已.

3. $|A|<B-1, B-1>0$

设边界层在 $x=1$ 处，则外解用 $y_{0L}^{(o)}$. 在边界层外缘 $\xi\to-\infty$, 由表 7.7.1, $y_0^{(i)}\to-\beta<0$, 外解 $y_{0L}^{(o)}(1)=A+1$. 若 $A+1>0$, 则无法匹配，边界层不能在 $x=1$. 若 $A+1<0$, 则 $-\beta=A+1$, 内解应该由 $\xi=-\infty$ 处的 $A+1<0$ 上升至 $\xi=0$ 处的 $B>0$. 由表 7.7.1, 内解为 $\beta\mathrm{th}\frac{\beta}{2}(\xi+K)$, 且 $|y_0^{(i)}|<\beta$. 按匹配条件 $-y_0^{(i)}(-\infty)=\beta=-(A+1)=-A+1-2<B-2$, 所以内解不可能在 $\xi=0$ 处上升至 B. 总之，边界层不能在 $x=1$ 处.

设边界层在 $x=0$ 处, 外解 $y_{0R}^{(o)}(0)=B-1$, 内解从 $y_0^{(i)}(0)=A$ 升至 $y_0^{(i)}(\infty)=B-1$, 所以由表 7.7.1, 内解为

$$y_0^{(i)}(\xi)=(B-1)\mathrm{th}\frac{B-1}{2}(\xi+K) \qquad (7.7.15)$$

K 由下述边界条件决定

$$y_0^{(i)}(0)=A=(B-1)\mathrm{th}\frac{B-1}{2}K \qquad (7.7.16)$$

其首项一致有效展开为

$$y = x + (B-1)\text{th}\frac{B-1}{2}\left(\frac{x}{\varepsilon} + K\right) \tag{7.7.17}$$

其中 K 由 (7.7.16) 式给出. 对于 $|B| < |A+1|, A+1 < 0$ 的情况, 除了 $x_0 = 1$ 以外, 其余都可同样讨论.

4. $B > 0, A < 0, -A > |B-1|, B > |A+1|$

若边界层在 $x = 0$ 处, 则 $y_{0R}^{(o)}(0) = B-1 = \beta = y_0^{(i)}(\infty)$, 内解应从 $y_0^{(i)}(\infty) = B-1$ 下降至 $y_0^{(i)}(0) = A$. 由表 7.7.1,$|y_0^{(i)}| < \beta = B-1$, 所以 $|A| = -A$ 应该小于 $\beta = |B-1|$, 而这与假设 $-A > |B-1|$ 矛盾, 所以不可能有这种情况.

若边界层在 $x = 1$ 处, 则 $y_{0L}^{(o)}(1) = A+1 = y_0^{(i)}(-\infty) = -\beta$, 内解应从 $y_0^{(i)}(0) = B$ 下降至 $y_0^{(i)}(-\infty) = A+1$. 由表 7.7.1,$|y_0^{(i)}| < \beta = |A+1|$, 所以 B 应该小于 $\beta = |A+1|$, 这与假设矛盾, 所以边界层也不可能在 $x = 1$ 处.

其实在这种情况下, 边界层已经从两个端点处被挤到中间的某一点, 形成所谓激波层, 而两端反而没有边界层了. 外解分段取为

$$y_{0L}^{(o)} = x + A\ , \qquad y_{0R}^{(o)} = x + B - 1 \tag{7.7.18}$$

为了在 $\xi \to \pm\infty$ 时与两个外解匹配, 内解只可能取 th 的形式, 因而其极限为 $\pm\beta$. 因此, 激波位置 x_d 可由 $-y_{0L}^{(o)} = y_{0R}^{(o)}$ 决定, 即

$$-(x_d + A) = x_d + B - 1\ , \qquad x_d = \frac{1-A-B}{2} \tag{7.7.19}$$

而

$$y_{0R}^{(o)}(x_d) = \frac{B-A-1}{2} \tag{7.7.20}$$

按照匹配原理可得

$$y_0^{(i)} = \frac{B-A-1}{2}\text{th}\frac{B-A-1}{4}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(x - \frac{1-A-B}{2}\right)\right] \tag{7.7.21}$$

所以首项一致有效展开为

$$y=x+\frac{B+A-1}{2}+\frac{B-A-1}{2}\text{th}\frac{B-A-1}{4\varepsilon}(x-\frac{1-A-B}{2})+O(\varepsilon) \tag{7.7.22}$$

5. $0<B<1,-1<A<0,0<B<A+1$

与 (4) 同样讨论可知两端均无边界层，又因为 $y_{0L}^{(o)}>y_{0R}^{(o)}$，而当 ξ 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$ 时，内解由 $-\beta$ 上升至 β，不可能下降，所以像 (4) 那样的激波解也不可能出现．对这种情况，外解取为

$$y^{(o)}=\begin{cases}x+A & 0\leq x\leq -A\\ 0 & -A\leq x\leq 1-B\\ x+B-1 & 1-B\leq x\leq 1\end{cases} \tag{7.7.23}$$

这一外解在 $x=-A$ 和 $1-B$ 处形成弱间断，称为角层．这种情况正是前面指出的 $A+x_0=0,B-1+x_0=0$ 的情况，所以 $y^{(i)}$ 的首项为 $\varepsilon^{\lambda}y_0^{(i)}$，于是用内变量表示的方程 (7.7.1) 化为

$$\varepsilon^{1-2\lambda}y_0''^{(i)}(\xi)+y_0^{(i)}y_0'^{(i)}(\xi)-y_0^{(i)}(\xi)=0 \tag{7.7.24}$$

而不是 (7.7.6)．使 (7.7.24) 能有与外解可匹配的解的 λ 为 1/2，所以其内变量为

$$\xi=\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\quad (x_0=-A\text{ 或 }1-B)$$

$y_0^{(i)}$ 应满足的方程为

$$y_0''^{(i)}(\xi)+y_0^{(i)}y_0'^{(i)}(\xi)-y_0^{(i)}(\xi)=0 \tag{7.7.25}$$

上式没有解析解，但有首次积分

$$y_0'^{(i)}+\ln|1-y_0'^{(i)}|+\frac{1}{2}y_0^{(i)2}=\text{const} \tag{7.7.26}$$

在右边那个角层 $(x_0=1-B)$ 处，按照 Prandtl 匹配原理

$$y^{(i)}=\sqrt{\varepsilon}y_0^{(i)}(\xi)=0\quad(\xi\to-\infty\ ,\ x\to 1-B)$$

$$y^{(i)}=\sqrt{\varepsilon}y_0^{(i)}(\xi)=y^{(o)}=x+B-1=\sqrt{\varepsilon}\xi\quad(\xi\to+\infty,x\to 1-B)$$

所以 $y_0^{(i)}(\xi) \to 0\ (\xi \to -\infty)$，$y_0^{(i)}(\xi) \to \xi\ (\xi \to +\infty)$. 由相平面分析可知，当 $\xi \to \infty$ 时有指数衰减解，可与 $y_0^{(o)}$ 相匹配.

对于左边那个角层有类似的情况.

6. $0 < B < 1, A > 0$

外解应取为

$$y_0^{(o)} = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 - B \\ x + B - 1 & 1 - B \le x < 1 \end{cases})$$

在 $x = 1 - B$ 处有一角层，在 $x = 0$ 处函数从 A 降到零，显然有边界层. 由于 th, cth 型式的内解没有等于零的外极限，它需要有 $y^{(i)} = \sqrt{\varepsilon} y_0^{(i)}(\xi)$ 形式的过渡解趋于外解的零，从而形成所谓的过渡层. 也就是说在 $x = 0$ 处有二个边界层，其厚度分别为 $O(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon^{1/2})$. 对于厚度为 $O(\varepsilon^{1/2})$ 的过渡层,

$$\xi = x/\sqrt{\varepsilon} \tag{7.7.27}$$

内解 $y^{(i)} = \sqrt{\varepsilon} y_0^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ 满足 (7.7.25), 其匹配条件为

$$y_0^{(i)}(\xi) \to 0 \quad (\xi \to +\infty) \tag{7.7.28}$$

所以首次积分 (7.7.26) 中的常数应为零. 由相平面分析可得

$$y_0^{(i)}(\xi) \to \frac{2}{\xi} + \cdots \quad (x \to 0) \tag{7.7.29}$$

现在来考虑 $x = 0$ 处的 $O(\varepsilon)$ 内层的 $y_0^{(I)}$. 为了使 $y_0^{(I)}$ 与 $\sqrt{\varepsilon} y_0^{(i)}$ 能匹配, 注意到 (7.7.29) 为代数衰减, 所以 $y_0^{(I)}$ 也必须是代数衰减的. 因此，首次积分 (7.7.8) 的常数 $C = 0$, 从而得到

$$y_0^{(I)} = \frac{2}{\zeta + \frac{2}{A}} \tag{7.7.30}$$

其中 $\zeta = x/\varepsilon$. $y_0^{(I)}$ 满足 $y_0^{(I)}(0) = A$ 和 $\zeta \to \infty$ 时的匹配条件. 对于 $B < 0, 0 > A > -1$ 的情况，结果类同.

综上所述，方程 (7.7.1) 的边界层的位置和类型完全由边界条件 A 和 B 决定，其中变化无穷. 由习题 7.19 可知，二阶线性常微分方程的边界层位置决定于一阶导数项系数的符号. 对于方程 (7.7.1) 而言，其一阶导数项的系数为 y, 正是我们所要求的解，事先无法知道，只有在求解的过程中才能逐步确定. 因此用奇异摄动法求解非线性问题时要特别小心.

7.8 偏微分方程的例子

在实际问题中经常碰到带有小参数的偏微分方程. 由于偏微分方程更难得到精确解，所以更需要用奇异摄动理论来求它们的近似解. 本节将介绍用边界层理论求解偏微分方程的一致有效渐近解的几个例子.

[例 7.8.1] 试求椭圆型方程的 Dirichlet 问题

$$\varepsilon(u_{xx}+u_{yy})=u_y \quad (x,y)\in\Omega \tag{7.8.1}$$

$$u=\begin{cases} f^+(x) & \Gamma^+: y=y^+(x) \\ f^-(x) & \Gamma^-: y=y^-(x) \end{cases} \tag{7.8.2}$$

的解的首项一致有效渐近展开. 其中解域 Ω 和边界 Γ^+ 和 Γ^- 如图 7.8.1 所示.

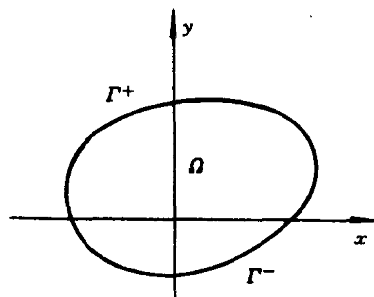


图 7.8.1 求解区域及边界

(7.8.1) 的退化问题为

$$u_{0,y}=0 \tag{7.8.3}$$

它的特征线 $x=\text{const}$ 称为子特征线，(7.8.3) 的通解为

$$u_0=f(x)$$

该解在与 y 轴平行的直线 $x=\text{const}$ 上有相同的值，因此只能满足 Γ^+ 或 Γ^- 上的某一个边界条件，

因此在另一个边界上出现边界层. 在 (7.8.1) 中把 x 看作参数, 并把 (7.8.1) 看作自变量为 y 的常微分方程, 由习题 7.19 知在 Γ^+ 附近有边界层.

令

$$\eta = \frac{y - y^+(x)}{\varepsilon} \tag{7.8.4}$$

$$u(x, y, \varepsilon) = V(x, \eta, \varepsilon) = V_0(x, \eta) + \cdots \tag{7.8.5}$$

代入 (7.8.1), 注意到

$$u_x = V_x + V_\eta[-y'^+(x)]/\varepsilon$$

可得

$$KV_{0,\eta\eta} - V_{0,\eta} = 0 \tag{7.8.6}$$

其中

$$K = 1 + (y'^+)^2 > 0$$

其边界条件为

$$V_0(x, 0) = f^+ \ , \quad V_0(x, -\infty) = f^- \ (\text{匹配条件}) \tag{7.8.7}$$

方程 (7.8.6) 符合边界条件 (7.8.7) 的解为

$$V_0 = (f^+ - f^-)e^{\eta/K} + f^- \tag{7.8.8}$$

如果 Ω 的边界有一平行于子特征线的直线, 如图 7.8.2 所示. 其边界条件为

$$u = \begin{cases} f^+ & \text{在} y = y^+(x) \text{上} \\ f^- & \text{在} y = y^-(x) \text{上} \\ g(y) & \text{在} x = x_0 \text{上} \end{cases} \tag{7.8.9}$$

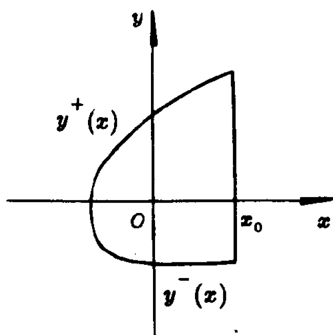


图 7.8.2 区域边界平行于子特征线的情况

且

$$g[y^-(x_0)] = f^-(x_0)\ ,$$
$$g[y^+(x_0)] = f^+(x_0) \tag{7.8.10}$$

在这种情况下，外解 u_0 一般不能满足 $x = x_0$ 处的边界条件，因而在该处也有边界层. 取内变量

$$\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon^\lambda} \tag{7.8.11}$$

令

$$u(x, y, \varepsilon) = W(\xi, y, \varepsilon) = W_0(\xi, y) + \cdots \tag{7.8.12}$$

为使 $W_{\xi\xi}$ 与 W_y 同阶， $\lambda = \frac{1}{2}$, W_0 应满足

$$W_{0\xi\xi} = W_{0y} \tag{7.8.13}$$

$$W_0(0, y) = g(y)$$
$$W_0(-\infty, y) = f^-(x_0) \tag{7.8.14}$$
$$W_0(-\infty, y^-(x_0)) = f^-(x_0)$$

其解为

$$W_0 = f^-(x_0) + \int_0^{y-y^-(x_0)} \frac{[g(\zeta) - f^-(x_0)]\xi}{2\sqrt{\pi(y - y^-(x_0) - \zeta)^3}} \exp\left[\frac{-\xi^2}{4(y - y^-(x_0) - \zeta)}\right] d\zeta\ ,$$
$$y^-(x_0) \leq y \leq y^+(x_0) \tag{7.8.15}$$

这是 $x = x_0$ 附近的内解 (不适用于 $(x_0, y^+(x_0))$ 点), 而且这里的边界层厚度为 $O(\varepsilon^{1/2})$, 比 $y^+(x)$ 处的边界层要厚些.

当 Ω 具有复杂形状时，可用子特征线进行分割，然后如本例处理.

[**例 7.8.2**] 试求双曲型方程的 Cauchy 问题

$$\varepsilon(u_{xx} - u_{tt}) = u_t + a u_x \quad (a = \text{const}, |a| < 1) \tag{7.8.16}$$

$$u(x, 0) = F(x)\ , \quad u_t(x, 0) = G(x) \tag{7.8.17}$$

的解的首项一致有效渐近展开.

把 x 看作参数，把 (7.8.16) 看作为关于 t 的常微分方程，可知其边界层在 $t=0$ 处. 所以外解不能用初始条件 (7.8.17).

先求外解

$$u^{(o)} = u_0^{(o)} + \varepsilon u_1^{(0)} + \cdots$$

$u_0^{(o)}$ 满足方程

$$u_{0t}^{(o)} + a u_{0x}^{(o)} = 0$$

其解为

$$u_0^{(o)} = f(x - at) \tag{7.8.18}$$

其中 f 为待定函数. $u_1^{(o)}$ 满足方程

$$u_{1t}^{(o)} + a u_{1x}^{(o)} = u_{0xx}^{(o)} - u_{0tt}^{(o)} = (1 - a^2) f''(x - at)$$

其解为

$$u_1^{(o)} = g(x - at) + (1 - a^2) t f''(x - at) \tag{7.8.19}$$

其中 f, g 都为待定函数，由匹配决定.

现在求内解. 引进内变量

$$\tau = t/\varepsilon \tag{7.8.20}$$

令

$$u^{(i)} = u_0^{(i)}(x, \tau) + \varepsilon u_1^{(i)}(x, \tau) + \cdots$$

$u_0^{(i)}$ 满足

$$u_{0\tau\tau}^{(i)} + u_{0\tau}^{(i)} = 0$$

初始条件为

$$u_0^{(i)}(x, 0) + \varepsilon u_1^{(i)}(x, 0) + \cdots = F(x) \tag{7.8.21}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} u_{0\tau}^{(i)}(x, 0) + u_{1\tau}^{(i)}(x, 0) + \cdots = G(x) \tag{7.8.22}$$

所以

$$u_0^{(i)}(x,0) = F(x)\ , \quad u_{0\tau}^{(i)}(x,0) = 0$$

$u_0^{(i)}$ 的解为

$$u_0^{(i)} = F(x) \tag{7.8.23}$$

由 (7.8.21), (7.8.22) 两式可知本问题至少要解两项才是完全的，否则初始导数 $G(x)$ 进不了解，因而解是不完全的. 所以一个问题至少要解一项还是两项，得由问题本身决定.

$u_1^{(i)}$ 满足

$$u_{1\tau\tau}^{(i)} + u_{1\tau}^{(i)} = -au_{0x}^{(i)} = -aF'(x)$$

$$u_1^{(i)}(x,0) = 0 \qquad u_{1\tau}^{(i)}(x,0) = G(x)$$

其解为

$$u_1^{(i)} = [G(x) + aF'(x)](1 - e^{-\tau}) - a\tau F'(x) \tag{7.8.24}$$

内外解要用 Van Dyke 匹配原理匹配以决定 f 和 g 两个任意函数.

两项外解的两项内展开 $f(x) - atf'(x) + \varepsilon g(x)$

两项内解的两项外展开 $F(x) - atF'(x) + \varepsilon[G(x) + aF'(x)]$

因此,

$$f(x) = F(x)\ , \quad g(x) = G(x) + aF'(x) \tag{7.8.25}$$

最后，组合展开解为

$$\begin{aligned} u = \ & F(x-at) + \varepsilon\{G(x-at) + aF'(x-at) + (1-a^2)tF''(x-at) \\ & -[G(x) + aF'(x)]e^{-t/\varepsilon}\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7.8.26}$$

对原问题 (7.8.16) 按 Fourier 变换求解，再用驻相法求渐近解，也可得同样的结果.

[例 7.8.3]　试求双曲型方程的混合问题

$$\varepsilon(u_{xx}-u_{tt})=u_t+au_x \qquad (|a|<1) \tag{7.8.27}$$

$$u(0,t)=H(t) \tag{7.8.28}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0 \tag{7.8.29}$$

的解的一致有效渐近展开.

分如下两种情况讨论：

1. $-1<a<0$

退化问题的子特征线如图 7.8.3 所示，容易知道外解为零，由初始条件 (7.8.29) 知，在上例中讨论过的 $t=0$ 处的边界层在本问题中不存在. 但这平凡的外解一般不符合 $x=0$ 处的边界条件而出现边界层. 引进内变量 $\xi=x/\varepsilon$，令

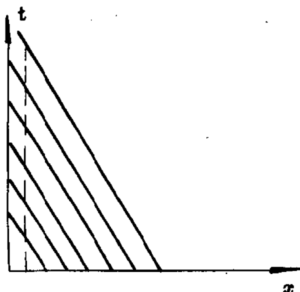


图 7.8.3　$-1<a<0$ 时，退化问题的子特征线

$$u(x,t,\varepsilon)=V(\xi,t,\varepsilon)=V_0(\xi,t)+\varepsilon V_1(\xi,t)+\cdots \tag{7.8.30}$$

零阶量满足

$$V_{0\xi\xi}-aV_{0\xi}=0 \tag{7.8.31}$$

$$V_0(0,t)=H(t) \tag{7.8.32}$$

$$V_0(\infty,t)=0 \text{ (匹配条件)} \tag{7.8.33}$$

其解为

$$V_0=H(t)e^{a\xi} \tag{7.8.34}$$

2. $0<a<1$

退化问题的特征线如图 7.8.4 所示，一部分从 x 轴出发，一部分从 t 轴出发，所以首项外解为

$$u_0^{(o)}(x,t)=\begin{cases}H(t-\dfrac{x}{a}) & t>\dfrac{x}{a}\\ 0 & t<\dfrac{x}{a}\end{cases} \tag{7.8.35}$$

很显然，首项外解在 $x=at$ 上发生间断，必然在那里出现边界层.

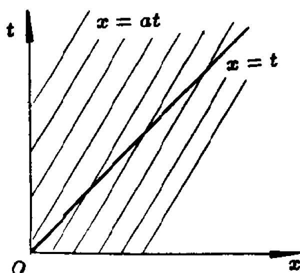


图 7.8.4　$1>a>0$ 时，退化问题的子特征线

令

$$\eta=t-\frac{x}{a} \tag{7.8.36}$$

方程 (7.8.27) 变为

$$\varepsilon(1-a^2)u_{\eta\eta}-2\varepsilon a^2u_{t\eta}-\varepsilon a^2u_{tt}=a^2u_t \tag{7.8.37}$$

这样 $x=at$ 上的边界层变为了 $\eta=0$ 处的边界层，取内变量

$$\zeta=\eta/\sqrt{\varepsilon} \tag{7.8.38}$$

令

$$u(x,t,\varepsilon)=V(\zeta,t,\varepsilon)=V_0(\zeta,t)+\varepsilon V_1(\zeta,t)+\cdots \tag{7.8.39}$$

代入 (7.8.37) 得到 V_0 的方程

$$(1-a^2)V_{0\zeta\zeta}=a^2V_{0t} \tag{7.8.40}$$

由 Prandtl 匹配原理得到

$$V_0=\begin{cases}H(+0) & \zeta\to+\infty\\ 0 & \zeta\to-\infty\end{cases} \tag{7.8.41}$$

我们可以假设

$$V_0(0,t)=\frac{1}{2}H(+0) \tag{7.8.42}$$

问题 (7.8.40) — (7.8.42) 的解为

$$V_0(\zeta,t)=\frac{1}{2}H(+0)[1+\operatorname{erf}(\frac{a\zeta}{\sqrt{2(1-a^2)t}})] \tag{7.8.43}$$

其中 $\operatorname{erf}(z)$ 为误差函数

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-s^2}ds \tag{7.8.44}$$

解 (7.8.43) 把 $x=at$ 两侧的间断抹平了，两侧均有厚度为 $O(\varepsilon)$ 的边界层. 显然 (7.8.43) 在原点附近失效，原点附近还须另外处理.

［**例 7.8.4**］ 对于变边界的热传导方程的初边值问题

$$\varepsilon u_t=u_{xx}\,,\quad 0\leq x\leq b(t) \tag{7.8.45}$$

$$u_0(0,t)=\varphi(t)\,,\quad u[b(t),t]=0 \tag{7.8.46}$$

$$u(x,0)=\psi(x)\,,\quad 0\leq x\leq b(0) \tag{7.8.47}$$

试求其首项一致有效渐近展开.

显然，(7.8.45) 的退化问题只能满足边界条件，而不可能满足初始条件. 因此在 $t=0$ 附近存在一边界层，我们用复合展开法求解它. 设

$$u=\sum_{n=0}\varepsilon^n f_n(x,t)+\exp[-G(t)/\varepsilon]\sum_{n=0}g_n(x,t) \tag{7.8.48}$$

其中 $G(t)$ 待定，因为 $t=0$ 处为边界层，所以 $G(0)=0$. 把上式代入 (7.8.45) — (7.8.47), 令 ε^n 及 $\varepsilon^n e^{-G(t)/\varepsilon}$ 的各阶系数分别为零，可得

$$f_{0xx}=0 \tag{7.8.49}$$

$$f_0(0,t)=\varphi(t)\ ,\quad f_0[b(t),t]=0 \tag{7.8.50}$$

$$g_{0xx}+G'(t)g_0=0 \tag{7.8.51}$$

$$g_0(0,t)=0\ ,\quad g_0[b(t),t]=0 \tag{7.8.52}$$

$$f_0(x,0)+g_0(x,0)=\psi(x)\ ,\quad 0<x<b(0) \tag{7.8.53}$$

以及 g_1 的方程和边界条件

$$g_{1xx}+G'(t)g_1=g_{0t} \tag{7.8.54}$$

$$g_1(0,t)=g_1[b(t),t]=0 \tag{7.8.55}$$

f_0 的解为

$$f_0=\varphi(t)[1-\frac{x}{b(t)}] \tag{7.8.56}$$

g_0 满足齐次方程、齐次边界条件，为使 g_0 有非零解，$G'(t)$ 应取特征值

$$G'_k(t)=[\frac{k\pi}{b(t)}]^2\ ,\quad k=1,2,\cdots \tag{7.8.57}$$

相应的正交归 — 特征函数为

$$\chi_k=\sqrt{\frac{2}{b(t)}}\sin\frac{k\pi x}{b(t)} \tag{7.8.58}$$

于是

$$g_0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)\chi_k(x,t) \tag{7.8.59}$$

$a_k(t)$ 为待定函数，它须要从 g_1 的可解性条件定出.

对应于 G_k' 的 g_1 的方程为

$$g_{1xx} + G_k' g_1 = a_k' \chi_k + a_k \chi_{kt} \tag{7.8.60}$$

$$g_1(0,t) = g_1[b(t),t] = 0 \tag{7.8.61}$$

因为正交归一的特征函数 (7.8.58) 构成一个完备系，所以任一函数可按此函数系展开. 把 g_1 按特征函数展开

$$g_1 = \sum_{S=1}^{\infty} C_s(t)\chi_S(x,t) \tag{7.8.62}$$

把上式代入 (7.8.60) 得到

$$\sum_{S=1}^{\infty}(G_k' - G_s')C_s\chi_s = a_k'\chi_k + a_k\chi_{kt} \tag{7.8.63}$$

上式两端乘以 χ_k, 然后对 x 从 0 积分到 $b(t)$, 利用函数系 χ_k 的正交性，得到

$$\int_0^{b(t)} [a_k'(t)\chi_k^2 + a_k(t)\chi_k\chi_{kt}]dx = 0 \tag{7.8.64}$$

这就是方程 (7.8.60) 的可解性条件. 由于

$$\int_0^{b(t)} \chi_k^2(x,t)dx = 1$$

所以

$$b'(t)\chi_k^2[b(t),t] + \int_0^{b(t)} 2\chi_k\chi_{kt}dx = 0$$

由于 $\chi_k[b(t),t] = 0$, 于是 $\int_0^{b(t)} \chi_k\chi_{kt}dx = 0$. 由 (7.8.64) 得

$$a_k'(t) = 0\ , \quad a_k(t) = \text{const} \tag{7.8.65}$$

把 (7.8.56), (7.8.59) 代入初始条件 (7.8.53) 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k[\frac{2}{b(0)}]^{1/2} \sin\frac{k\pi x}{b(0)} = \psi(x) - \varphi(0)[1 - \frac{x}{b(0)}] = F(x)$$

于是

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{b(0)}}\int_0^{b(0)} F(x)\sin\frac{k\pi x}{b(0)}dx \tag{7.8.66}$$

所以问题的首项解为

$$u = \varphi(t)[1 - \frac{x}{b(t)}] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sqrt{\frac{2}{b(t)}}\sin\frac{k\pi x}{b(t)}\exp[-\frac{k^2\pi^2}{\varepsilon}\int_0^t\frac{d\zeta}{b^2(\zeta)}] \tag{7.8.67}$$

由本例可见，复合展开法比较简捷，但必须对问题有足够的了解（如边界层的位置、大小等）才能发挥其作用.

习　　题

7.1　考虑方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon\dot{u}^2 u$$

试求其两项正则展开并讨论其一致有效性；

试求其一阶的一致有效展开式.

7.2　单摆的运动方程为

$$\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = 0$$

试对小而有限的 θ 值，求两项一致有效展开式.

7.3　利用多重尺度法和平均化方法求

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\mu\dot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

的解 u 的一阶的一致有效展开式.

7.4　对于方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\dot{u}^3 = 0$$

试求 u 的一阶的一致有效展开式.

7.5　考虑方程

$$\ddot{u}+u-\varepsilon(1-u^2)\dot{u}+\varepsilon u^3=0$$

试求其一阶的一致有效展开式.

7.6　试证明

$$\ddot{x}-2x-x^2+x^3=0$$

的平衡位置是 $x=0,-1$ 和 2, 并讨论 $x=2$ 附近的解的性态, 即令 $x=2+u$, 求 u 的二阶的一致有效展开.

7.7　试求

$$\ddot{u}+u+\varepsilon u^2+\varepsilon\dot{u}^2=0$$

二阶的一致有效展开式.

7.8　试求　$\ddot{u}+u+\varepsilon u|u|=0$

一阶的一致有效展开式.

7.9　考虑方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=-2\varepsilon\mu\dot{u}-\varepsilon\alpha u^2+K\cos\Omega t$$

试求 $\Omega\approx 2\omega_0$ 和 $\Omega\approx\omega_0$ 时的一阶的一致有效展开式.

7.10　当 $\Omega=\omega_0+\varepsilon\sigma$ 时, 试证明方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u=\varepsilon(\dot{u}-\frac{1}{3}\dot{u}^3)+\varepsilon k\cos\Omega t$$

的解 $u=a\cos(\omega_0t+\beta)+\cdots$, 而 a 和 β 由下式决定

$$\dot{a}=\frac{1}{2}\varepsilon(1-\frac{1}{4}\omega_0^2a^2)a+\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\sin(\varepsilon\sigma t-\beta)$$

$$a\dot{\beta}=-\frac{\varepsilon k}{2\omega_0}\cos(\varepsilon\sigma t-\beta).$$

7.11　当 $\omega_3\approx\omega_1+\omega_2$ 时, 试求方程组

$$\ddot{u}_1+\omega_1^2u_1=\varepsilon\alpha_1u_2u_3$$

$$\ddot{u}_2+\omega_2^2u_2=\varepsilon\alpha_2u_1u_3$$

$$\ddot{u}_3+\omega_3^2u_3=\varepsilon\alpha_3u_1u_2$$

的首项渐近近似式.

7.12　试求 Mathieu 方程

$$\ddot{u}+(\delta+2\varepsilon\cos 2t)u=0$$

由 $\delta=0,4$ 时二阶的一致有效展开式.

7.13　当 $\Omega=\omega_2\pm\omega_1$ 时，试求方程组

$$\ddot{u}_1+\omega_1^2u_1+\varepsilon\cos\Omega t(f_{11}u_1+f_{12}u_2)=0$$

$$\ddot{u}_2+\omega_2^2u_2+\varepsilon\cos\Omega t(f_{21}u_1+f_{22}u_2)=0$$

的渐近解的振幅和相位应满足的方程.

7.14　试求方程组

$$\ddot{u}_1+\ddot{u}_2+2u_1=\sum_{n=1}^{4}P_ne^{int}$$

$$\ddot{u}_2-\ddot{u}_1+2u_2=\sum_{n=1}^{4}Q_ne^{int}$$

的可解性条件，式中 P_n 和 Q_n 为常数.

7.15　试求下列两个问题的可解性条件:

a) $\varphi''+\dfrac{n^2\pi^2}{d^2}\varphi=f(x)$

$\varphi'(0)=0\ ,\quad \varphi'(d)=\beta$

b) $\varphi''+r_n^2\varphi=f(x)$

$\varphi'(0)=0\ ,\quad \varphi'(1)-\alpha\varphi(1)=\beta\ ,$　其中 $r_n\tan r_n=-\alpha$

7.16　试求

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda u=F(r)$$

$$u(a)=u_a\ ,\quad u(b)=u_b$$

的可解性条件，λ 是齐次问题的特征值.

7.17　二自由度系统自由响应的方程为

$$\ddot{u}_1+\frac{1}{2}\ddot{u}_2+\delta u_1=\varepsilon u_1u_2$$

$$\ddot{u}_1-\frac{1}{2}\ddot{u}_1+\frac{1}{2}u_2=\varepsilon u_1^2$$

其中 $\delta=\frac{1}{2}+\varepsilon\sigma$, 试确定描述振幅和相位的方程.

7.18　流过波纹壁的不可压缩流的数学描述如下:

$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\varepsilon k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin kx\ ,\quad 在y=\varepsilon\cos kx处$$

$$\varphi \to Ux\,, \quad 当 \ y \to \infty 时$$

试证明

$$\varphi = U[x + \varepsilon \sin kxe^{-ky} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 k \sin 2kxe^{-2ky} + \cdots]$$

并讨论此展开式是一致有效的.

7.19 考虑边值问题

$$\varepsilon y'' + b(x)y' + C(x)y = 0$$

$$y(0) = A\,, \quad y(1) = B$$

试证: $b(x) > 0$ 时边界层位置在 $x = 0$ 处, $b(x) < 0$ 时, 边界层位置在 $x = 1$ 处.

7.20 用边界层理论求例 7.4.3 的一致有效展开式, 并把结果与例 7.4.3 相比较.

7.21 试利用多重尺度法和匹配渐近展开法求

$$\varepsilon y'' - y' = 1$$

$$y(0) = \alpha\,, \quad y(1) = \beta$$

一阶的一致有效展开式, 并把结果与精确解作比较.

7.22 试求边值问题

$$\varepsilon y'' + (2x^2 + x + 1)y' = 4x + 1$$

$$y(0) = \alpha\,, \quad y(1) = \beta$$

一阶的一致有效展开式.

7.23 试求方程

$$\varepsilon y'' + xy' - xy = 0$$

$$y(-1) = \alpha\,, \quad y(1) = \beta$$

一阶的一致有效展开式.

7.24 试求边值问题

$$\varepsilon y''' - y' = 1$$

$$y(0) = \alpha\ ,\quad y'(0) = \beta\ ,\quad y(1) = r$$

两项的一致有效展开式.

7.25　试求边值问题

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \varepsilon uu' = 0$$

$$u(1) = 0\ ,\quad u(\infty) = 1$$

两项的一致有效展开式.

7.26　试求边值问题

$$\varepsilon y'' + y' = 2x$$

$$y(0) = \alpha\ ,\quad y(1) = \beta$$

两项的一致有效展开式.

7.27　试求边值问题

$$\varepsilon y'' + \sqrt{x}y' - y = 0$$

$$y(0) = 0\ ,\quad y(1) = e^2$$

的一致有效展开式，精确至 $O(\varepsilon)$.

7.28　试求一阶非线性方程

$$(x + \varepsilon y)\frac{dy}{dx} + (1 + \varepsilon)y = 0\ ,\quad y(1) = 1$$

精确至 $O(\varepsilon)$ 阶的一致有效展开式.

7.29　试求下列边值问题的首项解:

$$\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = u_x$$

$u|_\Gamma = f(\theta)$ ，　Γ 为 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半圆

$u = F(x)$ ，　当 $y = 0$

且　$f(\pi) = F(-R)$

第八章　摄动理论在流动问题中的应用

奇异摄动理论应用得非常广泛，很多基本的应用已经在各种各样的奇异摄动理论中给予了介绍，读者可在相应的书藉中找到 (Nayfeh 1984, 钱伟长 1981, Van Dyke 1987, 谢定裕 1983)，这里不再加以重复. 这里介绍的是流体力学中二个典型的例子：粘性边界层理论及粘性小 Reynolds 数流动. 此外，本章着重介绍了作者自己的研究成果，包括任意截面渠道中的孤立波及其分裂，非传播孤立波，Stokes 波及其稳定性，气泡振动的一个非线性耦合模型等等.

8.1　小 Reynolds 数流动

作为一个典型例子，我们研究不可压缩、粘性均匀来流在小 Reynolds 数下对球体的绕流问题. Stokes(1851), Oseen(1910), Goldstein(1929), Kaplun 和 Lagerstrom(1957) 等人曾对这个问题作过详细的研究. 关于这个问题的研究，在匹配方法的研究、发展中有着重要的地位. 这里我们只作简单的介绍.

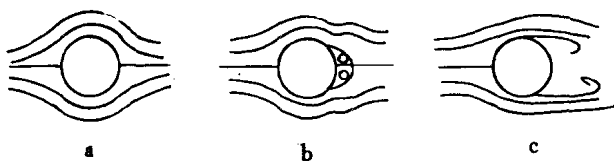


图 **8.1.1**　小 **Reynolds** 数下球体绕流的物理图象

我们先介绍一下小 Reynolds 数下球体绕流的物理图象. 这是很容易从实验直接观察的. 在 Reynolds 数很低时，流动模型差不多前后对称 (见图 8.1.1a). 随着 Reynolds 数的增加，大约在 $R \doteq 10$ 左右，尾流及旋涡开始出现 (见图 8.1.1b).Reynolds 数增大到 $R = 65$

左右，流动就变得不稳定了，在尾流的下游，出现振动（见图 8.1.1c）．到 $R=100$ 附近旋涡从物体表面分离，流动变得不规则了．

我们引进球坐标系，无量纲化以后，流体动力学方程如下：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{8.1.1}$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p+\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{8.1.2}$$

其中 Reynolds 数 $R=Ua/\nu, a$ 为球的半径， ν 为运动粘性系数，U 为来流速度．

由 (8.1.1) 式可知

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times A$$

且问题是球对称的， φ 方向没有速度，所以

$$A=(0,0,\frac{1}{r\sin\theta}\psi(r,\theta)) \tag{8.1.3}$$

其中 ψ 即为 Stokes 流函数

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=\frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$v_\varphi=0 \tag{8.1.4}$$

经过一些运算，就可以知道

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla\times A)=(0,0,\frac{-1}{r\sin\theta}D^2\psi) \tag{8.1.5}$$

其中

$$D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}) \tag{8.1.6}$$

对 (8.1.2) 式两边取旋度，利用 (8.1.3) — (8.1.5) 式并利用

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

$$\nabla\times(\nabla p)=0$$

$$\nabla\times(\nabla^2\boldsymbol{v})=-\nabla\times[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]$$

可得流函数 ψ 的方程如下：

$$\frac{1}{R}D^4\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{ctg}\theta - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)D^2\psi \tag{8.1.7}$$

其中 D^2 由 (8.1.6) 式定义.

球面上速度为零的边界条件 (用无量纲形式)

$$\psi(1,\theta) = \psi_r(1,\theta) = 0 \tag{8.1.8}$$

无穷远上游的均匀来流条件为

$$\psi(r,\theta) \to \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta, \quad r\to\infty \tag{8.1.9}$$

我们寻找 Poincaré 形式的解

$$\psi(r,\theta;R) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n\psi_n(r,\theta) \tag{8.1.10}$$

把 (8.1.10) 代入 (8.1.7) — (8.1.9) 式，使 R 的同次幂系数为零，可得

R^0阶 $\quad D^4\psi_0 = 0 \qquad (8.1.11a)$

$$\psi_0(1,\theta) = \psi_{0,r}(1,\theta) = 0 \tag{8.1.11b}$$

$$\psi_0(r,\theta) \to \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta, \quad r\to\infty \tag{8.1.11c}$$

R阶 $\quad D^4\psi_1 = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\psi_{0,r}\frac{\partial}{\partial r} - \psi_{0,r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\mathrm{ctg}\theta\psi_{0,r} - 2\frac{\psi_{0,\theta}}{r}\right)D^2\psi_0 \qquad (8.1.12a)$

$$\psi_1(1,\theta) = \psi_{1,r}(1,\theta) = 0 \tag{8.1.12b}$$

$$\psi_1(r,\theta) = o(r^2), \quad r\to\infty \tag{8.1.12c}$$

从 (8.1.11c) 式可知，ψ_0 有如下形式的解

$$\psi_0 = f(r)\sin^2\theta$$

代入方程 (8.1.11a) 得 $f(r)$ 的方程为

$$f^{(IV)} - 4f''/r^2 + 8f'/r^3 - 8f/r^4 = 0$$

其通解为

$$f = C_4 r^4 + C_2 r^2 + C_1 r + C_{-1} r^{-1}$$

从 (8.1.11b), (8.1.11c) 式定出常数，可得 Stokes 解

$$\psi_0 = \frac{1}{4}(2r^2 - 3r + \frac{1}{r})\sin^2\theta \tag{8.1.13}$$

把 (8.1.13) 式代入方程 (8.1.12a) 的右边，得

$$D^4\psi_1 = \frac{-9}{4}(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5})\sin^2\theta\cos\theta \tag{8.1.14}$$

由方程 (8.1.14) 及 (8.1.12) 可知 ψ_1 有如下形式的特解:

$$\psi_1 = g(r)\sin^2\theta\cos\theta$$

代入方程 (8.1.14), 得 $g(r)$ 的方程为

$$g^{(\mathrm{IV})} - \frac{12}{r^2}g'' + \frac{24}{r^3}g' = \frac{-9}{4}(\frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^5})$$

其通解为

$$\begin{aligned} g(r) = \quad & b_{-2}r^{-2} + b_0 + b_3 r^3 + b_5 r^5 \\ & -\frac{3}{16}r^2 + \frac{9}{32}r + \frac{3}{32}r^{-1} \end{aligned}$$

由边界条件定出常数，得到

$$\psi_1 = \frac{-3}{32}(2r^2 - 3r + 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2})\sin^2\theta\cos\theta \tag{8.1.15}$$

因为有 $\frac{-3}{16}r^2$ 项，所以 (8.1.15) 式不满足 (8.1.12c) 式，因此两项展开式

$$\begin{aligned}\psi = &\frac{1}{4}(2r^2 - 3r + \frac{1}{r})\sin^2\theta - \frac{3}{32}R(2r^2 - 3r \\ &+1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2})\sin^2\theta\cos\theta + O(R^2)\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

在 $r \to \infty$ 时失效. 这就是所谓 Whitehead(1889) 佯谬.

产生这样的非一致有效性的原因，在物理上很容易理解. 因为在球体附近，速度很小，而粘性很大，粘性力远远大于惯性力，所以忽略惯性力的近似不会出问题. 但在无穷远处，就不一定这样，可能出问题. 下面我们研究一下被 Stokes 忽略的惯性项和保留下来的粘性项之间的数量级关系. 把 (8.1.13) 式代入 (8.1.12a) 式的右边，可以知道

$$忽略的项 = O(R/r^2)$$

同样，把 (8.1.13) 式代入方程 (8.1.11a) 中保留的交叉项为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta})\right]\psi_0 = (\frac{3}{r^3} - \frac{6}{r^5})\sin^2\theta = O(1/r^3)$$

所以

$$\frac{忽略的项}{保留的项} = O(Rr)$$

当 r 随着 $O(1/R)$ 增加时，Stokes 展开失效. Oseen 用这样的极限过程： $R \to 0$ ， $\rho = Rr$ 固定，导出了在流场内到处有效的 Oseen 展开，解释了 Whitehead 佯谬. 值得注意的是： $\rho = Rr$ 是一个缩小变换. 在这变换下，方程 (8.1.7) 变为

$$\mathcal{D}^4\Psi = \frac{R^2}{\rho^2\sin\theta}(\Psi_\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \Psi_\rho\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\mathrm{ctg}\theta\,\Psi_\rho - 2\frac{\Psi_\theta}{\rho})\mathcal{D}^2\Psi \tag{8.1.17}$$

其中

$$\mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta})$$

因为偏微分方程的通解一般来说是不知道的，所以直接求解方程 (8.1.17) 十分困难. 下面我们用匹配原则作指导，指出展开式的形式，逐项决定内部解和外部解. 因为 Stokes 解 (8.1.13) 是一致有效的，所以 Oseen 展开的第一项很容易决定，只要把 (8.1.13) 式改写为 Oseen 变量，然后取 Oseen 极限 ($R \to 0$, $\rho = Rr$ 固定) 即得 $\rho^2 \sin^2\theta / 2R^2$.

下面用匹配方法求 Oseen 展开的第二项.

$$\begin{aligned}&\text{一项Stokes解的两项Oseen展开}\\&=\text{两项Oseen解的一项Stokes展开}\\&=\frac{\rho^2}{2R^2}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\frac{1}{R}\rho\sin^2\theta\end{aligned} \tag{8.1.18}$$

所以 Oseen 展开 (记作 Ψ) 必有如下形式:

$$\Psi = \frac{\rho^2}{2R^2}\sin^2\theta + \frac{1}{R}\Psi_1(\rho,\theta) + \Psi_2(\rho,\theta) + \cdots \tag{8.1.19}$$

把 (8.1.19) 式代入 (8.1.17) 式，使 R^{-1} 的系数为零，得到 Oseen 方程

$$(\mathcal{D}^2 - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta})\mathcal{D}^2\Psi_1 = 0 \tag{8.1.20}$$

我们用下面两个方程来代替 (8.1.20) 式:

$$\mathcal{D}^2\Psi_1 = \Phi e^{\frac{1}{2}\rho\cos\theta} \tag{8.1.21}$$

$$(\mathcal{D}^2 - \frac{1}{4})\Phi = 0 \tag{8.1.22}$$

从 (8.1.22) 式解出 $\Phi = f(\rho)\sin^2\theta$ 形式的解，代入 (8.1.21) 式得到

$$\mathcal{D}^2\Psi_1 = A(1 + \frac{2}{\rho})e^{\frac{1}{2}\rho(\cos\theta - 1)}\sin^2\theta \tag{8.1.23}$$

方程 (8.1.23) 有特解

$$\Psi_1 = -2A(1+\cos\theta)\left[1 - e^{-\frac{1}{2}\rho(1-\cos\theta)}\right] \tag{8.1.24}$$

方程 (8.1.23) 的齐次方程还有形如

$$(\frac{C}{\rho}+B\rho^2)\sin^2\theta$$

的解，由无穷远处的条件，可知 $B=0$. 由于一般问题的解为最小奇性的解，而 $C=0$ 即为在原点有最小奇性的解. 所以我们把上述特解作为方程 (8.1.23) 的解. 由匹配条件 (8.1.18) 确定 $A=\frac{3}{4}$. 所以两项 Oseen 展开式为

$$\Psi=(\rho^2\sin^2\theta)/2R^2-\frac{3}{2R}(1+\cos\theta)\left[1-e^{-\frac{1}{2}\rho(1-\cos\theta)}\right]+O(1) \tag{8.1.25}$$

下面我们来求球面附近 Stokes 解的第二项 ψ_1, 可知 ψ_1 满足方程 (8.1.12a) , 其解由齐次方程解 (8.1.13) 和特解 (8.1.15) 构成，即

$$\psi_1=c_2(2r^2-3r+\frac{1}{r})\sin^2\theta-\frac{3}{32}(2r^2-3r+1-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2})\sin^2\theta\cos\theta$$

而 c_2 则由匹配原则才能决定.

(两项 Oseen 解的) 两项 Stokes 展开式为

$$\frac{1}{4}(2r^2-3r)\sin^2\theta+\frac{3}{16}Rr^2(1-\cos\theta)\sin^2\theta \tag{8.1.26}$$

(两项 Stokes 解的) 二项 Oseen 展开式为

$$\frac{\rho^2}{2R^2}\sin^2\theta+\frac{1}{R}(2c_2\rho^2-\frac{3}{16}\rho^2\cos\theta-\frac{3}{4}\rho)\sin^2\theta \tag{8.1.27}$$

令 (8.1.26),(8.1.27) 两式相等，就得到 $c_2=3/32$.

因此流函数在球体附近的 Stokes 展开式为

$$\psi\sim\frac{1}{4}(r-1)^2\sin^2\theta\left[(1+\frac{3}{8}R)(2+\frac{1}{r})-\frac{3}{8}R(2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2})\cos\theta\right] \tag{8.1.28}$$

由上式可知，在球面上、对称轴上 $\psi=0$ ，而且由 (8.1.28) 式还可知在曲线

$$\cos\theta=(\frac{8}{3R}+1)(\frac{2r^2+r}{2r^2+r+1}) \tag{8.1.29}$$

上， $\psi=0$. 所以 (8.1.29) 式是球的下游旋涡边界的近似描述 (当然出现旋涡时， Reynolds 数 R 已经不小了).

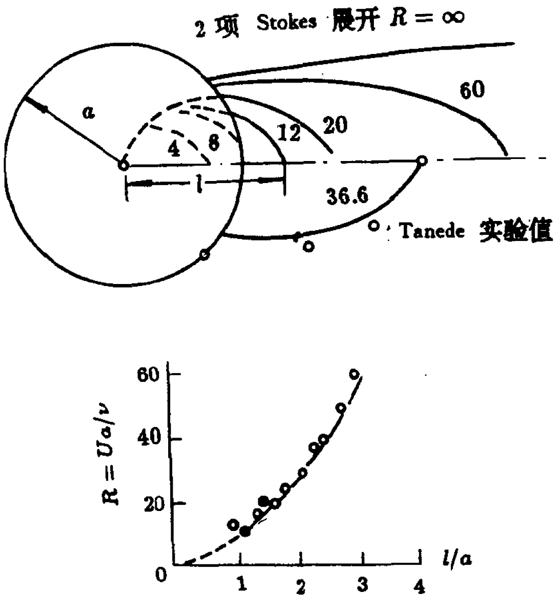


图 8.1.2 旋涡边界的理论和实验比较 (取自 [93])

○ 实验值 Taneda(1956) ● 数值计算 Jenson(1959)

── 二项 Stokes 展开

图 8.1.2a 画出了 $R=36.6$ 时 Taneda(1956) 的实验观测值，可见与 (8.1.29) 符合. 旋涡边界的下游端点为

$$r_e=\frac{1}{4}(\sqrt{1+3R}-1) \tag{8.1.30}$$

因此旋涡首先在 $R=8$ 时出现，这和 Jenson(1959) 由 Navier Stokes 方程计算所得的结果 $R=8.5$ 非常符合，和 Taneda 的测量值 $R=12$ 也是大体符合的. 图 8.1.2b 表示在不同的 Reynolds 数下， (8.1.30) 式和实验观察值的比较. 从图上可以看出，直到稳定流动的观察极限 $R=60$, 两者仍然符合很好.

对于高阶近似有兴趣的读者，可参看 Proudman 和 Pearson(1957) 的文章.

8.2 大 Reynolds 数流动

为了简单起见，我们考虑均匀来流对半无穷平板的无攻角绕流，且考虑不可压缩粘性流体的定常平面层流流动. 这个问题首先由 Goldstein(1956) 及 Imai(1957) 等人研究. 8.1 节一样的过程，引进流函数后， Navier-Stokes 方程可变为

$$(\psi_y\frac{\partial}{\partial x}-\psi_x\frac{\partial}{\partial y})\nabla^2\psi=\frac{1}{R}\nabla^4\psi \tag{8.2.1}$$

其中 ψ 为流函数， $u=\psi_y$, $v=-\psi_x$. R 为 Reynolds 数， $R=UL/\nu$, ν 为运动粘性系数， L 为参考长度. 坐标系取为： x— 平板方向， y— 垂直方向，原点在平板的端点上.

边界条件为：

物面上速度为零

$$\psi(x,0)=0 \tag{8.2.2}$$

$$\psi_y(x,0)=0\ ,\qquad x>0 \tag{8.2.3}$$

无穷远上游条件

$$\psi(x,y)\sim y \tag{8.2.4}$$

我们求 $R\to\infty$ 时的渐近解

$$\psi(x,y;R)\sim\delta_1(R)\psi_1(x,y)+\delta_2(R)\psi_2(x,y)+\cdots \tag{8.2.5}$$

其中 $\delta_1(R),\delta_2(R)$,$\cdots$ 为渐近序列，

$$\lim_{R\to\infty}\delta_n(R)/\delta_{n-1}(R)=0$$

$\delta_n(R)$ 在求解过程中确定.

由 (8.2.4) 式可得

$$\psi_1(x,y) \sim \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{\delta_1(R)}\right] y$$

在无穷远上游成立. $\lim_{R\to\infty}\left[\delta_1^{-1}(R)\right]$ 可以有三种情况:

1. $\lim_{R\to\infty}\left[\delta_1^{-1}(R)\right]=0$, 得到平凡解 $\psi_1(x,y)=0$.
2. $\lim_{R\to\infty}\left[\delta_1^{-1}(R)\right]=\infty$. 则解 $\psi_1\to\infty$.

这两种情况都没有什么意义，唯一有意义的解为第三种情况，即

3. $\lim_{R\to\infty}\left[\delta_1^{-1}(R)\right]=$ 有限，不失一般性，可令其为 1.

我们得到外部解首项 ψ_1 的方程如下:

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\psi_1=0 \tag{8.2.6}$$

圆括号中的算子为 $\nabla^2\psi_1$ 沿流线方向的导数，所以首项积分为

$$\nabla^2\psi_1=-\omega(\psi_1)$$

这说明沿流线涡量守恒，即无粘性时没有涡的耗散. 在均匀来流的情况，在无穷远处是无旋的，即 $\omega(\psi_1)=0$, 所以 ψ_1 所满足的方程及边界条件如下:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\psi_1=0\\&\psi_1(x,0)=0\\&\psi_1(x,y)\sim y,\quad \text{在无穷远上游}\end{aligned}\right\} \tag{8.2.7}$$

其解即为简单的均匀平行流,

$$\psi_1(x,y)=y \tag{8.2.8}$$

即在 $R=\infty$ 时，平板的存在对外部解不产生扰动. 解 (8.2.8) 不满足物面上切向速度为零的条件 (8.2.3)，因此在物面附近产生了解的非一致有效区.

在流体力学中，我们知道，大 Reynolds 数时在物面附近，存在着很薄的边界层．通过这一薄层，流体沿物面的切向速度迅速从零变为外部势流解．为考察这一流体的流动情况，我们必须把这一薄层的法向坐标放大．令

$$Y = y/H(R),$$

$H(R)$ 为放大因子，是边界层厚度的数量级，它在求解过程中决定．下面我们求边界层的内部解展开式

$$\psi \sim \triangle_1(R)\Psi_1(x,Y) + \triangle_2(R)\Psi_2(x,Y) + \cdots \tag{8.2.9}$$

其中 $\triangle_n(R)$ 为渐近序列，且当 $Y = O(1)$ 时，$\Psi_n = O(1)$．

按照 Prandtl 的预见，在边界层中

$$u = \psi_y = O(1)$$

即

$$\triangle_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y}\frac{\triangle_1(R)}{H(R)} = O(1)$$

所以 $H(R)$ 与 $\triangle_1(R)$ 同阶，可令 $H(R) = \triangle_1(R)$．因为 $Y = y/H(R)$ 是一个放大变换，所以 $H(R) = o(1)$，亦即

$$\lim_{R\to\infty} H(R) = 0$$

把 (8.2.9) 式代入方程 (8.2.1)，略去高阶项可得

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y}\right)\frac{\partial_2 \Psi_1}{\partial Y^2} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R\triangle_1^2(R)}\right]\frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial Y^4} \tag{8.2.10}$$

同样 $\lim\limits_{R\to\infty}\left[\dfrac{1}{R\triangle_1^2(R)}\right]$ 也可有三种情况：

1. $\lim\limits_{R\to\infty}\left[\dfrac{1}{R\triangle_1^2(r)}\right] = 0$，$\Psi_1$ 与无粘的外部解相同，物理上不合理．

2. $\lim\limits_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R\triangle_1^2(R)}\right]=\infty, \Psi_1$ 为 Y 三次多项式，无法与外部解匹配.

3. $\lim\limits_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R\triangle_1^2(R)}\right]$ 有限，于是可令

$$\triangle_1(R)=R^{-1/2},\qquad Y=\sqrt{R}y$$

这就是流体力学中知道的结果：边界层厚度正比于 $R^{-1/2}$.

方程 (8.2.10) 变成了

$$(\frac{\partial^2}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y})\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}=0$$

上式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial Y}(\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial Y^3}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial Y})=0$$

进行积分后可得

$$\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial Y^3}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial Y}=f(x)\tag{8.2.11}$$

我们应用匹配原则来决定 $f(x)$，匹配时，我们用 ψ_y, 而不是用 ψ, 因为 ψ_y 有切向速度的物理意义. 对于 $m=n=1$ 的情况，由前面的结果可得

一项外部解的一项内部展开 $\psi_{1,y}(x,0)$,

一项内部解的一项外部展开 $\Psi_{1,Y}(x,\infty)$,

所以

$$\psi_{1,y}(x,0)=\Psi_{1,Y}(x,\infty)\tag{8.2.12}$$

这就是边界层理论中熟知的条件：边界层外缘的切向速度与无粘势流切向速度相等. 利用 (8.2.12) 式, 在 $Y=\infty$ 点, 我们可定出 (8.2.11) 式中的 $f(x)$, 得到

$$\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial Y^3}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial Y}=-\psi_{1,y}(x,0)\psi_{1,xy}(x,0)\tag{8.2.13}$$

方程 (8.2.13) 即为大家熟悉的 Prandtl 边界层方程. (8.2.13) 式右边是利用 Bernoulli 方程得到的压力梯度. 由此可见，边界层理论是大 Reynolds 数粘性流动的一阶近似.

对于半无限平板，由于没有压力梯度，所以其边界层问题变为

$$\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial Y^3} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y^2} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial Y} = 0 \tag{8.2.14a}$$

$$\Psi_1(x,0) = 0 \tag{8.2.14b}$$

$$\Psi_{1,Y}(x,0) = 0, \qquad x > 0 \tag{8.2.14c}$$

$$\Psi_{1,Y}(x,\infty) = 1 \tag{8.2.14d}$$

由于没有特征长度，所以有解

$$\Psi_1(x,Y) = \sqrt{2x} f_1(\eta), \qquad \eta = Y/\sqrt{2x} \tag{8.2.15}$$

代入方程 (8.2.14) 即得

$$f_1''' + f_1 f_1'' = 0 \tag{8.2.16a}$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0 \tag{8.2.16b}$$

$$f_1'(\infty) = 1 \tag{8.2.16c}$$

这就是著名的 Blasius 问题，其解即为 Blasius 解，在各种流体力学教科书中都能找到，这里只列出一些结果.

在 η 很小时，

$$f_1(\eta) = \frac{1}{2} f_1''(0)\eta^2 + O(\eta^5), \qquad f_1''(0) = 0.4696 \tag{8.2.17}$$

$\eta \to \infty$ 时，

$$f_1(\eta) \sim \eta - \beta + exp, \qquad \beta = 1.21678 \tag{8.2.18}$$

其中 exp 表示当 $\eta \to \infty$ 时指数衰减的项.

边界层位移厚度

$$\delta=\int_0^\infty(1-\frac{u}{U})dy=\sqrt{\frac{2x}{R}}\int_0^\infty(1-f')d\eta=\beta\sqrt{\frac{2x}{R}} \tag{8.2.19}$$

下面我们求外部解的第二项,也就是边界层对外部流动的影响.我们先由两项外部解和一项内部解的匹配来决定 $\delta_2(R)$ 及 ψ_2 的边界条件.

一项内部解的两项外部展开式为

$$\begin{aligned}\psi &\sim \frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}f_1(\eta)\sim\frac{1}{\sqrt{R}}\sqrt{2x}(\eta-\beta+exp)\\ &\sim y-\frac{1}{\sqrt{R}}\beta\sqrt{2x}=\frac{Y}{\sqrt{R}}-\frac{1}{\sqrt{R}}\beta\sqrt{2x}\end{aligned} \tag{8.2.20}$$

两项外部解的内部展开式为

$$\psi=y+\delta_2(R)\psi_2(x,y)=\frac{Y}{\sqrt{R}}+\delta_2(R)\psi_2(x,0)+\cdots \tag{8.2.21}$$

因此，匹配原则导致

$$\delta_2(R)=\frac{1}{\sqrt{R}} \tag{8.2.22}$$

$$\psi_2(x,0)=-\beta\sqrt{2x} \tag{8.2.23}$$

把 (8.2.23) 式代入 (8.2.21) 式，得出 $y=\beta\sqrt{\frac{2x}{R}}$ 时，$\psi=0$, 这就是边界层位移厚度，与 Blasius 解导出的结果 (8.2.19) 完全一致.

把 (8.2.23) 式对 x 微分，得到

$$-\psi_{2,x}(x,0)=\beta/\sqrt{2x} \tag{8.2.24}$$

这就是外部流动中物面上法向速度的二阶分量应该满足的条件. 由此可知边界层的作用相当于在物面上分布了一个源,其强度由 (8.2.24) 式决定.

把外部解的展开式 (8.2.5) 代入方程 (8.2.1), 得到 ψ_2 的方程

$$(\psi_{1,y}\frac{\partial}{\partial x}-\psi_{1,x}\frac{\partial}{\partial y})\nabla^2\psi_2+(\psi_{2,y}\frac{\partial}{\partial x}-\psi_{2,x}\frac{\partial}{\partial y})\nabla^2\psi_1=0$$

由于 $\nabla^2\psi_1=0$ 及上游无旋条件，可得

$$\nabla^2\psi_2=0 \tag{8.2.25}$$

即外部流动的二阶项仍然是无粘无旋流动． ψ_2 的边界条件为

$$\psi_2(x,0)=\begin{cases}0, & x<0\\ -\beta\sqrt{2x}, & x>0\end{cases} \tag{8.2.26}$$

$$\psi_2(x,y)=o(y) \qquad \infty\text{远上游}$$

由复变函数很容易知道方程 (8.2.25),(8.2.26) 的解为

$$\psi_2(x,y)=-\beta\mathrm{Re}\sqrt{2(x+iy)}$$

其中 Re 是取实数部分.

我们再来求 $\Psi_2(x,Y)$, 先用匹配过程定出 $\triangle_2(R)$

两项外部解的两项内部展开式

$$\psi_y=1+\frac{0}{\sqrt{R}}$$

两项内部解的两项外部展开式

$$\psi_y=1+R^{1/2}\triangle_2(R)\,\Psi_{2,Y}(x,\infty)$$

因此我们可以选择

$$\triangle_2(R)=1/R$$

$$\Psi_{2,Y}(x,\infty)=0$$

把内部解的展开式 (8.2.9) 代入方程 (8.2.1), 得到 Ψ_2 应满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial Y}\Big(\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial Y^3}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial Y}$$
$$+\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial Y^2}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial Y}\Big)=0$$

边界条件为

$$\Psi_2(x,0)=0$$

$$\Psi_{2,Y}(x,0)=0$$

$$\Psi_{2,Y}(x,\infty)=0$$

因此最小奇性的解为 $\Psi_2(x,Y)=0$.

准确到二阶近似，半无限平板的粘性流动解为

$$\psi(x,y;R)=\begin{cases} y-\dfrac{1}{\sqrt{R}}\beta Re\sqrt{2(x+iy)}, & \text{外部解} \\ \sqrt{\dfrac{2x}{R}}f_1\left(\sqrt{\dfrac{R}{2x}}y\right)+\dfrac{0}{R}, & \text{内部解} \end{cases}$$

这里我们要说明两点:

1. Blasius 问题的解及 $\Psi_2(x,Y)$ 的解，在数学上并不唯一，我们取的是奇性最小的解，这里我们不准备讨论这方面的问题，读者可参考 Libby(1965) 的文章.

2. 平板的前缘及有限平板的后缘，情况复杂，需要另外讨论，这里不作介绍. 有兴趣的读者可参看 Messiter(1970) 的文章.

8.3 缓变任意截面渠道中的孤立波

孤立波由 Russell 于 1834 年首次报道，下面是他描述的当时见到孤立波的景象："我正在观察由两匹马拉着的一艘航船在狭窄的河道中疾速行进时的情景. 船突然停止了前进，但被船所推动的河水并不停止，它积聚在船头，汹勇翻腾，然后呈圆滑的轮廓分明的孤立突起波形，突然以巨大的速度滚滚向前，离船而去. 这个波沿着河道继续前进，显然并不改变其形状也不减少其速度. 我骑马跟踪并且追上了它. 它仍然以每小时大约 8–9 英里的速度滚滚向前，并保持它原来 1-1.5 英尺高，30 英尺长的外形，水波高度逐渐减小，追逐了 1—2 英里之后，它消失在河道的拐角处."

此后，孤立波一直为人们所注意，这方面的论述也很多．由于矩形渠道简单，所以矩形渠道中的孤立波讨论得最多 (Miles 1980)．但是，在很多工程实际问题中，渠道往往不是矩形的，其截面可以为任意形状，且在流动方向有所变化．截面形状及其变化对孤立波的影响是令人感兴趣的问题．本节我们要导出适用于这种渠道的缓变系数 KdV 方程，研究孤立波的高与渠道几何尺寸的关系，讨论孤立波的分裂．

对于底部不变的矩形渠道中的孤立波，即一维小而有限振幅的浅水长波，在上一章例 7.5.4 中，我们从 Boussinesq 方程

$$\zeta_t + u_x + \varepsilon(\zeta u)_t = 0 \tag{8.3.1}$$

$$\zeta_x + u_t + \varepsilon u u_x - \frac{k}{3}\varepsilon u_{xxt} = 0 \tag{8.3.2}$$

出发，得到了 KdV 方程

$$f_\tau + \frac{3}{2} f f_\xi + \frac{k}{6} f_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{8.3.3}$$

其孤立波解为

$$f = a\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3a}{4k}}(x - t - \frac{a}{2}\varepsilon t)\right] \tag{8.3.4}$$

写成有量形式为

$$\zeta = a\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{3ga}}{2h}(\int c^{-1}dx - t)\right] \tag{8.3.5}$$

其中 c 为孤立波的相速度

$$c^2 = gh(1 + a/h) \tag{8.3.6}$$

g 为重力加速度， h 为水深， a 为波高，是个常数．相速度与波高有关，波越高，相速度越大．

对于缓变渠道情况，最简单的是深度 d 缓变的矩形渠道. 对于小振幅而言，波高按照 Green 定律

$$a \sim h^{-1/4} \tag{8.3.7}$$

而变化. 对于孤立波的情况，Miles(1980) 的综述文章指出，孤立波波高随水的深度而变

$$a \sim h^{-1} \tag{8.3.8}$$

而对于宽度和深度都缓变的矩形渠道而言

$$a \sim l^{-2/3} h^{-1} \tag{8.3.9}$$

其中 l 为渠道宽度. 所以解 (8.3.5) 中的 a 应为

$$a = a_0 (l/l_0)^{-2/3} (\frac{h}{h_0})^{-1} \tag{8.3.10}$$

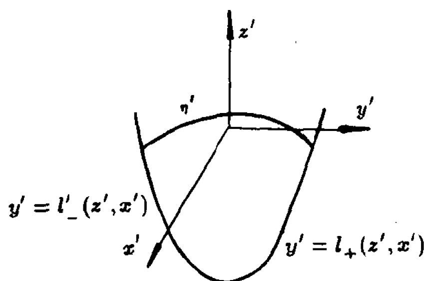


图 8.3.1　渠道截面及坐标系

下面我们考虑缓变任意截面渠道中的孤立波.

我们研究理想不可压缩流体的无旋运动. 渠道横断面及坐标，如图 8.3.1 所示. x' 轴为流动方向，z' 轴垂直向上，坐标原点在自由面平衡位置. 我们假定：(1) 渠道的深度和宽度是同量级的. (2) 水深远小于波长，且波幅较小，即 $1 \gg \varepsilon = (h_0/\lambda)^2 = O(a/h_0)$，其中 λ 为波长，h_0 为特征水深，a 为波幅. (3) 渠道形状随 x' 的变化是缓慢的，即 $y' = l_\pm(z', \varepsilon x')$.

引进如下的无量纲量:

$$x = x'/\lambda, \qquad y = y'/h_0, \qquad z = z'/h_0$$

$$t = t'\sqrt{gh_0}/\lambda, \qquad \eta = \eta'/h_0\varepsilon, \qquad l_\pm = l'_\pm/h_0$$

$$u = u'/\varepsilon\sqrt{gh_0}, \qquad v = v'\lambda/\varepsilon h_0\sqrt{gh_0}, \qquad w = w'\lambda/\varepsilon h_0\sqrt{gh_0}$$

$$p = \frac{1}{\varepsilon}\left[z + (p' - p'_a)/\rho g h_0\right]$$

其中带 $'$ 号的量为有量纲量, $z = \eta(x, y, t)$ 为自由面高度, (u, v, w) 为流体的速度, p, ρ 分别为流体的压力、密度, p'_a 为自由表面压力, g 为重力加速度.

我们求行波解, 引入坐标变换:

$$\xi = \int \sqrt{l/A}dx - t, \quad \varepsilon x = X \tag{8.3.11}$$

其中 $l = l_+(0, X) - l_-(0, X) =$ 水面宽度, $A = \iint\limits_{(\sigma)} dydz =$ 渠道过水断面面积. 流体力学基本方程组变为:

$$\sqrt{l/A}u_\xi + \varepsilon u_X + v_y + w_z = 0 \tag{8.3.12a}$$

$$-u_\varepsilon + \varepsilon u(\sqrt{l/A}u_\varepsilon + \varepsilon u_X) + \varepsilon v u_y + \varepsilon w u_z + \sqrt{l/A}p_\xi + \varepsilon p_X = 0 \tag{8.3.12b}$$

$$\varepsilon\left[-v_\xi + \varepsilon u(\sqrt{l/A}v_\xi + \varepsilon v_X) + \varepsilon v v_y + \varepsilon w v_z\right] + p_y = 0 \tag{8.3.12c}$$

$$\varepsilon\left[-w_\xi + \varepsilon u(\sqrt{l/A}w_\xi + \varepsilon w_X) + \varepsilon v w_y + \varepsilon w w_z\right] + p_z = 0 \tag{8.3.12d}$$

边界条件为:

$$p = \eta, \qquad \text{在 } z = \varepsilon\eta \text{ 上} \tag{8.3.13a}$$

$$w = -\eta_\xi + \varepsilon u(\sqrt{l/A}\eta_\xi + \varepsilon\eta_X) + \varepsilon v \eta_y, \quad \text{在 } z = \varepsilon\eta \text{ 上} \tag{8.3.13b}$$

$$v = w l_{\pm z} + \varepsilon u l_{\pm X}, \qquad \text{在 } y = l_\pm(z, X) \text{ 上} \tag{8.3.13c}$$

把 u, v, w, p, η 按下式展开

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \cdots$$

代入 (8.3.12),(8.3.13) 式，得到零阶量的方程及边界条件如下：

$$-u_{0,\xi} + \sqrt{l/A} p_{0,\xi} = 0 \tag{8.3.14a}$$

$$p_{0,y} = p_{0,z} = 0 \tag{8.3.14b}$$

$$\sqrt{l/A} u_{0,\xi} + v_{0,y} + w_{0,z} = 0 \tag{8.3.14c}$$

$$\eta_0 = p_0, \quad w_0 = -\eta_{0,\xi}, \quad 在 \quad z = 0 上 \tag{8.3.15a}$$

$$v_0 = w_0 l_{\pm z}, \quad 在 \quad y = l_\pm(z, X) 上 \tag{8.3.15b}$$

由 (8.3.14),(8.3.15) 式可解得

$$\eta_0(\xi, X) = p_0(\xi, X)$$

$$u_0(\xi, X) = \sqrt{l/A}\, \eta_0(\xi, X)$$

由流动是无旋的条件引入势函数 φ，使

$$-\frac{l}{A}\eta_{0,\xi}\varphi_y = v_0, \quad -\frac{l}{A}\eta_{0,\xi}\varphi_z = w_o$$

且要求

$$\int\int \varphi dydz = 0 \tag{8.3.16}$$

由 (8.3.14c),(8.3.15) 式可知，φ 满足

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 1 \tag{8.3.17}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_z = A/l, \quad 在 \quad z = 0 上 \\ &\varphi_n = 0, \quad 在 \quad y = l_\pm(z, X) 上 \end{aligned} \tag{8.3.18}$$

这是 Poisson 方程的 Neumann 边值问题，(8.3.16) 式保证了解的唯一性. 由于渠道侧壁不随时间而变，所以 φ 与 ξ 无关，是 X,y,z 的函数.

一阶量的方程和边界条件为

$$-u_{1,\xi}+\sqrt{l/A}u_0u_{0,\xi}+\sqrt{l/A}p_{1,\xi}+p_{0,X}=0 \tag{8.3.19a}$$

$$-u_{0,\xi}+p_{1,y}=0 \tag{8.3.19b}$$

$$-w_{0,\xi}+p_{1,z}=0 \tag{8.3.19c}$$

$$\sqrt{l/A}u_{1,\xi}+u_{0,X}+v_{1,y}+w_{1,z}=0 \tag{8.3.19d}$$

$$\left.\begin{aligned}&p_1=\eta_1\\&w_{0,z}\eta_0+w_1=-\eta_{1,\xi}+\sqrt{l/A}u_0\eta_{0,\xi}\end{aligned}\right\}\quad \text{在}\quad z=0\quad \text{上} \tag{8.3.20a}$$

$$v_1=w_1l_{\pm z}+u_0l_{\pm X},\quad \text{在}\quad y=l_\pm(z,X)\quad \text{上} \tag{8.3.20b}$$

由 (8.3.19b), (8.3.19c), (8.3.20a) 式可得

$$p_1=-\frac{l}{A}\eta_{0,\xi\xi}\varphi(X,y,z)+\eta_1+\frac{1}{A}\eta_{0,\xi\xi}\varphi(X,y,0) \tag{8.3.21}$$

把 (8.3.19d) 式在渠道断面区域内积分，得

$$\iint\limits_{(\sigma)}(-\sqrt{l/A}u_{1,\xi}-u_{0,X})dydz=\iint\limits_{(\sigma)}(v_{1,y}$$

$$+w_{1,z})dydz=\int\limits_{(s)}v_1dz-w_1dy$$

其中 (s) 为 (σ) 的周线. 用 (8.3.19a) 式消去上式中的 $u_{1,\xi}$，利用边界条件 (8.3.20) 式，把上式积分出来，经过整理，可得如下的变系数 KdV 方程

$$\eta_0(\sqrt{Al})_X+2\sqrt{Al}\eta_{0,X}+(\frac{3l^2}{A}-l_z)\eta_0\eta_{0,\xi}$$

$$+\left(\frac{l}{A}\int_{l_-(0,X)}^{l_+(0,X)}\omega(X,y,0)dy\right)\eta_{0,\xi\xi\xi}=0 \tag{8.3.22}$$

其中 φ 为方程 (8.3.17) 满足边界条件 (8.3.18),(8.3.16) 的解.

对于矩形截面情况, (8.3.22) 式变为

$$\frac{(l\sqrt{h})_X}{l\sqrt{h}}\eta_0+2\eta_{0,X}+\frac{3}{h\sqrt{h}}\eta_0\eta_{0,\xi}+\frac{\sqrt{h}}{3}\eta_{0,\xi\xi\xi}=0 \tag{8.3.23}$$

对于如图 8.3.2 所示的左右对称的三角形渠道来说, (8.3.22) 式变为

$$\frac{1}{4}\sqrt{2h}\left(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma\right)\eta_{0,\xi\xi\xi}+\frac{10}{h\sqrt{2h}}\eta_0\eta_{0,\xi}$$
$$+2\eta_{0,X}+\frac{(h\sqrt{2h}\mathrm{tg}\gamma)_X}{h\sqrt{2h}\mathrm{tg}\gamma}\eta_0=0 \tag{8.3.24}$$

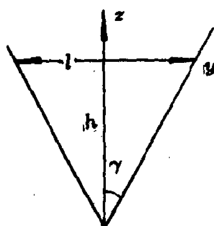


图 8.3.2 等腰三角形渠道截面

对方程 (8.3.22) 作变换

$$\zeta=(Al)^{\frac{1}{4}}\eta_0 \tag{8.3.25}$$

可把 (8.3.22) 式变为

$$\zeta_X+\alpha(X)\zeta\zeta_\xi+\beta(X)\zeta_{\xi\xi\xi}=0 \tag{8.3.26}$$

其中

$$\alpha(X)=\frac{(\frac{3l^2}{A}-l_z)}{2(Al)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\beta(X)=\frac{l}{A}\frac{1}{2\sqrt{Al}}\int_{l_-(0,X)}^{l_+(0,X)}\varphi(X,y,0)dy \tag{8.3.27}$$

对于矩形渠道

$$\alpha=\frac{3}{2}l^{-1/2}h^{-7/4},\quad \beta=\frac{1}{6}h^{1/2} \tag{8.3.28}$$

对于左右对称的三角形渠道

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{5}{2}(2h^{-9}\mathrm{tg}^{-2}\gamma)^{1/4}\\ \beta&=\frac{1}{8}\sqrt{2h}(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma)\end{aligned} \tag{8.3.29}$$

一般情况下，方程 (8.3.26) 只能数值求解．但若假定 α,β 为 X 的缓变函数，即

$$\alpha=\alpha(\mu X),\quad \beta=\beta(\mu X)$$

其中 $\mu\ll 1$ 是渠道缓变参量，则 (8.3.26) 式可解析求解，从而求得缓变任意截面渠道中的非线性周期波．把 ζ 按 μ 展开

$$\zeta(\theta,T)=\zeta_0(\theta,T)+\mu\zeta_1(\theta,T)+\cdots \tag{8.3.30}$$

其中

$$\begin{aligned}T&=\mu X\\ \theta&=\xi-\int\omega(X)dX\\ \omega&=\omega_0+\mu\omega_1+\cdots\end{aligned}$$

可得 ζ_0,ζ_1 的方程

$$-\omega_0\zeta_{0,\theta}+\alpha\zeta_0\zeta_{0,\theta}+\beta\zeta_{0,\theta\theta\theta}=0 \tag{8.3.31}$$

$$-\omega_0\zeta_{1,\theta}+\alpha(\zeta_0\zeta_1)_\theta+\beta\zeta_{1,\theta\theta\theta}=-\zeta_{0,T}+\omega_1\zeta_{0,\theta} \tag{8.3.32}$$

把 X 看作参数，(8.3.31) 式即为常系数 KdV 方程，其周期解为

$$\zeta_0 = H\left[(\frac{1}{m} - 1 - \frac{E}{Km}) + Cn^2(\sqrt{\frac{\alpha}{12\beta}\frac{H}{m}}\theta)\right] \tag{8.3.33}$$

其中 K, E 分别是第一、二类完全椭圆积分，m 为它们的模数. $m \to 1$ 时，(8.3.33) 式变为弧立波；$m \to 0$ 时，(8.3.33) 式成为无限小振幅波.

解 (8.3.33) 式的时间周期为

$$\tilde{T} = 2K\sqrt{\frac{12\beta m}{\alpha H}} \tag{8.3.34}$$

且 ω_0 与 m, H 的关系为

$$\omega_0 = \frac{\alpha H}{3m}(2 - m - \frac{3E}{K}) \tag{8.3.35}$$

m, H 及 θ 中的初始相位由边界条件决定.

方程 (8.3.31) 的弧立波解为

$$\zeta_0 = a\ \mathrm{sech}^2 b\theta \tag{8.3.36}$$

其中

$$a = \frac{3\omega_0}{\alpha}, \quad b = \sqrt{\frac{\omega_0}{4\beta}} \tag{8.3.37}$$

为了解方程 (8.3.32), 我们令

$$\zeta_1 = \zeta_{0,\theta}\, g(\theta, T) \tag{8.3.38}$$

g 所满足的方程为

$$\beta(2\zeta_{0,\theta\theta}g_\theta + \zeta_{0,\theta}g_{\theta\theta})_\theta + \zeta_{0,T} - \omega_1\zeta_{0,\theta} = 0 \tag{8.3.39}$$

利用 ζ_0 及其导数在无穷远处为零，把 (8.3.39) 式直接积分一次，然后乘以 $\zeta_{0,\theta}$, 再从 $-\infty$ 到 ∞ 积分之，对孤立波的情况分部积分后可得

$$\frac{\partial}{\partial T}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_0^2 d\theta = 0 \tag{8.3.40}$$

即

$$(a^2/b)_T = 0 \tag{8.3.41}$$

利用 (8.3.37) 式，上式又可表示为

$$\eta_0 \sim (\alpha/\beta)^{1/3}(Al)^{-1/4} \tag{8.3.42}$$

对于左右对称的三角形渠道而言

$$\eta_0 \sim h^{-5/3}\mathrm{tg}^{-2/3}\gamma(1+\frac{1}{3}tg^2\gamma)^{-1/3} \tag{8.3.43}$$

对于矩形渠道而言

$$\eta_0 \sim l^{-2/3}h^{-1} \tag{8.3.44}$$

该式与长波小振幅时的 Green 定律 $\eta_0 \sim l^{-1/2}h^{-1/4}$ 不同，各自适用于不同的情况.

孤立波的相速度

$$C = \left\{\frac{A}{l} + \varepsilon a\left[1-(Al_z/3l^2)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.3.45}$$

对于矩形渠道，上式变为

$$C^2 = h + \varepsilon a \tag{8.3.46}$$

与长波理论线性化结果一样.

对于如图 8.3.2 所示的三角形渠道

$$C^2 = \frac{1}{2}h + \frac{5}{6}\varepsilon a \tag{8.3.47}$$

在常截面渠道中传播的孤立波，经过一段变截面渠道之后会发展成几个孤立波加上一个残余波列，这就是孤立波的分裂. Madsen 和 Mei(1969) 首先从数值计算中发现了这种现象，并用实验加以证实. 这里我们将讨论任意截面渠道孤立波的分裂.

这里，我们不要求 α, β 为 X 的缓变函数，而从 (8.3.26) 式出发讨论问题.

作变换

$$\zeta=\frac{-6\beta}{\alpha}\mathcal{A},\quad \tau=\int_{X_1}^{X}\beta dX,\quad \sigma=\xi \tag{8.3.48}$$

(8.3.26) 式变为

$$\mathcal{A}_{\sigma\sigma\sigma}-6\mathcal{A}\mathcal{A}_\sigma+\mathcal{A}_\tau+\frac{1}{\beta}\left[\ln(\beta/\alpha)\right]_X\mathcal{A}=0 \tag{8.3.49}$$

方程 (8.3.49) 有如下两个不变量:

$$[\beta(X)/\alpha(X)]\cdot[\alpha(X_1)/\beta(X_1)]\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{A}d\sigma=\text{const} \tag{8.3.50}$$

$$[\beta(X)/\alpha(X)]^2\cdot[\alpha(X_1)/\beta(X_1)]^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{A}^2d\sigma=\text{const} \tag{8.3.51}$$

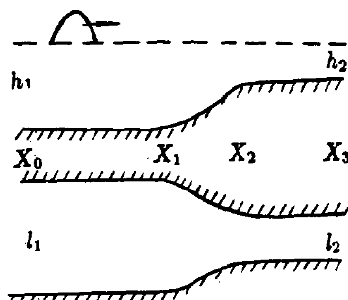


图 8.3.3 渠道深度及宽度的变化

如图 8.3.3 所示，有一孤立波

$$\mathcal{A}=-a_1\,\text{sech}^2 b_1\sigma$$

在任意常截面渠道 X_0X_1 中自左向右运动，经过变截面段 X_1X_2 后，波形变为

$$\mathcal{A}=-a_2\,\text{sech}^2 b_2\sigma \tag{8.3.52}$$

自然，(8.3.52) 式所描述的波已不再是孤立波了，利用不变量 (8.3.50)，

(8.3.51) 式可得

$$b_2 = b_1, \quad a_2 = a_1 [\alpha(X_2)/\beta(X_2)] \cdot [\beta(X_1)/\alpha(X_1)] \tag{8.3.53}$$

波在常截面渠道 X_2X_3 中的发展由下面的常系数 KdV 方程

$$\mathcal{A}_\tau - 6\mathcal{A}\mathcal{A}_\sigma + \mathcal{A}_{\sigma\sigma\sigma} = 0 \tag{8.3.54}$$

的初值问题所决定，其初值为

$$\mathcal{A}(\sigma, 0) = -a_2 \text{sech}^2 b_2\sigma = -a_1 \frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} \cdot \frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)} \text{sech}^2 b_1\sigma \tag{8.3.55}$$

按照反演散射理论，(8.3.54), (8.3.55) 式的特征方程为：

$$\psi_{\sigma\sigma} + (a_2 \text{sech}^2 b_2\sigma + \lambda)\psi = 0 \tag{8.3.56}$$

作变换 $Z = \text{th} b_2\sigma$,(8.3.54) 式可化为连带 Legendre 方程

$$\frac{d}{dZ}\left[(1 - Z^2)\frac{d\psi}{dZ}\right] + \left[\frac{a_2}{b_2^2} + \frac{\lambda}{b_2^2(1 - Z^2)}\right]\psi = 0 \tag{8.3.57}$$

再进行变换

$$\psi = (1 - Z^2)^{E/2}\omega(Z)$$
$$u = \frac{1}{2}(1 - Z)$$
$$E = \sqrt{-\lambda}/b_2$$

方程 (8.3.57) 变为超几何方程

$$u(1-u)\omega'' + (E+1)(1-2u)\omega' - (E-s)(E+s+1)\omega = 0 \tag{8.3.58}$$

其中 s 由下式决定

$$a_2/b_2^2 = s(s+1) = 2\frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} \cdot \frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)} \tag{8.3.59}$$

在 u 平面上单位圆内，(8.3.58) 式的正则解析解用超几何函数 $F(E-s, E+s+1; E+1; u)$ 表示，如果要求解在 $u = 1(Z = -1, \xi = -\infty)$ 有界，则必须

$$E - s = -n, \quad n = 0, 1, \cdots, [s]$$

即

$$\lambda = -(s-n)^2 b_2^2; \quad n = 0, 1, \cdots, [s] \tag{8.3.60}$$

其中 $[s]$ 表示不大于 s 的最大正整数.

因此, 方程 (8.3.56) 有 $[s]+1$ 个负的离散特征值. 按照反演散射理论, 每一个负的离散特征值对应于一个孤立波. 所以 (8.3.55) 式表示的波最终发展成为 N 个孤立波加上一个残余波列. 由 (8.3.59) 式可知孤立波个数 N 满足下面的不等式

$$N(N-1) < 2\frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)} \cdot \frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} < N(N+1) \tag{8.3.61}$$

而波幅 η_0 的渐近值为

$$\begin{aligned} &2\lambda\left[\frac{-6\beta}{\alpha}(Al)^{-\frac{1}{4}}\right]\Bigg|_{X=X_2} \\ &\quad = \frac{\beta(X_2)}{\alpha(X_2)}\frac{\alpha(X_1)}{\beta(X_1)}\left[\frac{A(X_1)l(X_1)}{A(X_2)l(X_2)}\right]^{\frac{1}{4}}(s-n)^2\eta_{0,1} \end{aligned} \tag{8.3.62}$$

其中 $\eta_{0,1}$ 表示 η_0 在常截面渠道 X_0X_1 中的值.

对于矩形渠道, α, β 由 (8.3.28) 式给出, 所以孤立波个数 N 满足不等式

$$N(N-1) < 2(l_1/l_2)^{1/2}(h_1/h_2)^{9/4} < N(N+1) \tag{8.3.63}$$

对于宽度固定的矩形渠道, 若把 h_1 取作 1, 则 (8.3.61) 式变为

$$N(N-1) < 2h_2^{-9/4} < N(N+1) \tag{8.3.64}$$

由 (8.3.62) 式知, 孤立波波幅 ζ_0 为

$$\frac{2(s-n)^2}{s(s+1)}\zeta_{0,1}, \quad n = 0, 1, \cdots, [s] \tag{8.3.65}$$

对于宽度不变、深度变为原深度一半的矩形渠道, 按照 (8.3.64) 式, $N=3$; 按照 (8.3.62) 式, 波幅分别为 $1.72\eta_{0,1}$, $0.66\eta_{0,1}$, $0.10\eta_{0,1}$.

这与 Madsen 和 Mei 的数值计算结果 $1.67\eta_{0,1}, 0.75\eta_{0,1}, 0.16\eta_{0,1}$. 符合得很好.

对于深度固定、宽度可变的矩形渠道，若取 $l_1 = 1$, 则 (8.3.61) 式变为:

$$N(N-1) < 2l_2^{-\frac{1}{2}} < N(N+1) \tag{8.3.66}$$

在这种情况下， $l_2 \leq \dfrac{1}{9}$ 才能分裂为三个孤立波，而深度可变时，分裂为三个孤立波的深度 $h_2 \leq 0.614$. 所以，渠道深度的变化比宽度的变化更容易产生孤立波的分裂.

由 (8.3.64),(8.3.66) 式知，对于单纯变化深度 (或宽度) 的矩形渠道，若 h_2(或 l_2) 大于 h_1(或 l_1), 就不会发生孤立波分裂. 但对于宽度、深度都有变化的矩形渠道，不管 h_2(或 l_2) 是否大于 h_1(或 l_1), 只要

$$(l_1/l_2)^{1/2}(h_1/h_2)^{9/4} > 1$$

就会发生孤立波的分裂. 这是由于宽度 (深度) 的减少弥补了深度 (宽度) 增加的作用.

对于如图 8.3.2 所示的三角形渠道，孤立波个数 N 满足下列不等式

$$N(N-1) < 2\frac{h_1^{11/4}(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma_1)\mathrm{tg}^{1/2}\gamma_1}{h_2^{11/4}(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma_2)\mathrm{tg}^{1/2}\gamma_2} < N(N+1) \tag{8.3.67}$$

而每个孤立波的波幅为:

$$\frac{h_2^2(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma_2)}{h_1^2(1+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\gamma_1)}(s-n)^2\eta_{0,1} \tag{8.3.68}$$

值得注意的是：当 γ 不变时，就孤立波分裂而言，三角形渠道与深度、宽度按同一规律变化的矩形渠道相当，而比单纯变化深度或宽度的矩形渠道更容易分裂.

Peters (1966) 最早考虑了任意截面渠道中的孤立波， Johnson (1973) 研究了缓变深度渠道中的孤立波，周显初 (1983, 1986, 1987) 研究了缓变任意截面渠道、有基本流动的渠道以及密度连续分层的渠道中的孤立波以及它们的分裂，他 (1989) 还考虑了各种流动情况下孤立波的发展变化．戴世强 (1983) 和 Grimshaw(1978) 也做了不少工作，有兴趣的读者可进一步参考这些文献．

8.4　非传播孤立波

孤立波是非线性科学中的一种典型现象，带有普遍意义．一般的孤立波都是行波，而非传播孤立波并不传播，并由此而得名．非传播孤立波很容易产生，在一个窄长的水槽中 (长 × 宽 × 高约为 30cm×2.5cm×8cm) 注入表面张力不很大的液体 (如肥皂水，甘油水溶液等等) 约 2—5cm 高，把水槽放在振动台上用约两倍于槽内液体本征振动频率及合适的振幅，使水槽振动．即可在槽内观察到非传播孤立波．因它不传播，为保持它的形状，它在宽度方向必须有谐振，是一种包络孤立波．非传播孤立波首先由我国南京大学赴美的访问学者吴君汝博士 (Wu et al. 1984) 报道．这里我们只想利用可解性条件导出非传播孤立波的控制方程 —— 一个带有共轭项的立方 Schrödinger 方程及其孤立波解．欲知更多详情的读者可参考 Larraza and Putterman(1984), Miles(1984) 、王本仁和魏荣爵 (1986) 、颜家壬 (1988) 、周显初和崔洪农 (1991, 1992) 等人的论文．

我们从水波的基本方程出发

$$\Delta^2\phi = 0,\quad h \le z \le \eta(x,y,t) \tag{8.4.1}$$

$$\phi_x = 0,\qquad x = \pm L\ (\text{端壁}) \tag{8.4.2a}$$

$$\phi_y = 0,\qquad y = 0, b\ (\text{侧壁}) \tag{8.4.2b}$$

$$\phi_z = 0,\qquad z = -h\ (\text{底面}) \tag{8.4.2c}$$

$$\phi_z = \eta_t + \phi_x\eta_x + \phi_y\eta_y, \qquad z = \eta(x, y, t) \text{（自由面）} \tag{8.4.3a}$$

$$\phi_t + \tilde{g}\eta + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$$

$$= \frac{\alpha}{\rho} \cdot \frac{\eta_{xx}(1+\eta_y^2) + \eta_{yy}(1+\eta_x^2) - 2\eta_x\eta_y\eta_{xy}}{(1+\eta_x^2+\eta_y^2)^{3/2}}$$

$$z = \eta(x, y, t) \tag{8.4.3b}$$

其中

$$\tilde{g} = g + g_1 = g + \varepsilon^2\gamma g cos 2\omega_0 t \tag{8.4.4a}$$

$$\gamma = 4\omega_0^2 a/\varepsilon^2 g \tag{8.4.4b}$$

ϕ 为速度势，η 为自由面高度，a 为强迫振动的振幅，α 为液体的表面张力系数，ρ 为液体的密度，$2\omega_0$ 为强迫振动频率，ε 为小量，z 轴垂直向上，以静止液面为零点．$L \gg b$．关于液体质量守恒方程将在有关的地方列出．

为了在自由面上给出 ϕ 的单一条件，而使 η 只包含在高阶项中，我们把自由面上的条件 (8.4.3a),(8.4.3b) 式合并为

$$\phi_{tt} + \phi_{tz}\eta_t + g(\phi_z - \phi_x\eta_x - \phi_y\eta_y) + (g_1\eta)_t + \phi_x\phi_{xt}$$

$$+\phi_y\phi_{yt} + \phi_z\phi_{zt} + \phi_x\phi_{xz}\eta_t + \phi_y\phi_{yz}\eta_t + \phi_z\phi_{zz}\eta_t$$

$$= \frac{\alpha}{\rho}\left[\phi_{zxx} + 2\phi_{xzz}\eta_x + \phi_{zz}\eta_{xx} + \phi_{zzz}\eta_x^2\right]$$

$$+\frac{\alpha}{\rho}\left[\phi_{zyy} + 2\phi_{yzz}\eta_y + \phi_{zz}\eta_{yy} + \phi_{zzz}\eta_y^2\right]$$

$$-\frac{\alpha}{\rho}(\phi_x\eta_x + \phi_y\eta_y)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho}(\phi_x\eta_x + \phi_y\eta_y)_{yy}$$

$$-\frac{\alpha}{\rho}(\frac{1}{2}\eta_{xx}\eta_y^2 + \frac{1}{2}\eta_{yy}\eta_x^2 + \frac{3}{2}\eta_{xx}\eta_x^2 + \frac{3}{2}\eta_{yy}\eta_y^2 + 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y)_t,$$

$$\text{在} z = \eta(x.y,t) \text{上} \tag{8.4.5}$$

引入多重尺度

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \varepsilon^2 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \cdots$$

(8.4.1) — (8.4.5) 式中对 x 和 t 的导数都应以下式代替:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots \tag{8.4.6}$$

把 ϕ, η 展开为

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix} = \Sigma \varepsilon^n \begin{bmatrix} \phi_n & (x, x_1, x_2, \cdots; y, z; t, t_1, t_2, \cdots) \\ \eta_n & (x, x_1, x_2, \cdots; y; t, t_1, t_2, \cdots) \end{bmatrix} \tag{8.4.7}$$

把自由面 $z = \eta$ 上的条件移到 $z = 0$ 上，因而

$$\begin{aligned} \phi(x, y, \eta, t) = {} & \phi(x, y, 0, t) + \phi_z(x, y, 0, t)\eta \\ & + \frac{1}{2}\phi_{zz}(x, y, 0, t)\eta^2 + \cdots \end{aligned} \tag{8.4.8}$$

把 (8.4.6) — (8.4.8) 式代入 (8.4.1) — (8.4.5) 式，并按 ε 的幂次排列，可得各阶的方程及定解条件.

一阶的方程及定解条件如下:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} & \phi_{1tt} + g\phi_{1z} - \frac{\alpha}{\rho}(\phi_{1xxz} + \phi_{1yyz}) = 0\ , \\ & -g\eta_1 + \alpha\rho^{-1}(\eta_{1xx} + \eta_{1yy}) = \phi_{1t}\ , \end{aligned}\right\} \text{在} z = 0 \text{上}$$

再加上定解条件 (8.4.2a),(8.4.2b) 和 (8.4.2c). 考虑到在 y 方向有谐振，所以一阶解为

$$\phi_1 = \phi_{11} = \frac{\mathrm{ch}k(z+h)}{\mathrm{ch}kh}[A(Z+Y) + c.c.] \tag{8.4.9}$$

$$\eta_1 = \frac{\omega i}{g(1+\sigma)}[A(Z+Y) - c.c.] \tag{8.4.10}$$

其中

$$\omega^2 = gkT(1+\sigma) \tag{8.4.11a}$$

$$T = \tanh kh \tag{8.4.11b}$$

$$\sigma = \alpha k^2/(\rho g) \tag{8.4.11c}$$

$$k = \pi/b \tag{8.4.11d}$$

$$Z = e^{i(ky-\omega t)} \tag{8.4.11e}$$

$$Y = e^{-i(ky+\omega t)} \tag{8.4.11f}$$

c.c. 表示前项的复共轭，ϕ_{11} 代表一阶解中的一次谐波. 注意，一阶解中不含 x，A 是缓变量 x_1, x_2, t_1, t_2 的函数. 这里我们还认为强迫共振频率之半与本征频率之差为小量

$$\omega_0 - \omega = \varepsilon^2 \omega_2 \tag{8.4.12}$$

二阶问题的方程和定解条件为

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \tag{8.4.13}$$

$$\begin{aligned} &\phi_{2tt} + g\phi_{2z} - \frac{\alpha}{\rho}(\phi_{2xxz} + \phi_{2yyz}) \\ &= -(\phi_{1tt} + g\phi_{1z})_z \eta_1 - \phi_{1tz}\eta_{1t} + g\phi_{1y}\eta_{1y} - \phi_{1y}\phi_{1yt} - \phi_{1z}\phi_{1zt} \\ &\quad -2\phi_{1tt} + \frac{\alpha}{\rho}\phi_{1zzyy}\eta_1 - \frac{\alpha}{\rho}(\phi_{1y}\eta_{1y})_{yy} + 2\frac{\alpha}{\rho}\phi_{1zzy}\eta_{1y} \\ &\quad + \frac{\alpha}{\rho}\phi_{1zz}\eta_{1yy}, \quad 在z = 0上 \end{aligned} \tag{8.4.14a}$$

$$\begin{aligned} &-g\eta_2 + \alpha\rho^{-1}(\eta_{2xx} + \eta_{2yy}) \\ &= \phi_{2t} + \phi_{1t_1} + \phi_{1tz}\eta_1 + \frac{1}{2}(\phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2), 在z = 0上 \end{aligned} \tag{8.4.14b}$$

定解条件还有 (8.4.2a),(8.4.2b) 和 (8.4.2c).

把 (8.4.2a) 式具体运算出来之后就会发现，在等号左边含有一阶齐次方程的一次谐波解 $c(Z+Y)+c.c.$ 为保证二阶问题 (8.4.13), (8.4.14) 有解，这些一次谐波项应满足所谓可解性条件. 对于 (8.4.14a) 式的可解性条件为

$$A_{t_1}=0 \tag{8.4.15}$$

为了解 ϕ_2 和 η_2，我们引入液体的质量守恒方程

$$\int_{-L}^{L}\int_{0}^{b}\int_{-h}^{\eta}dxdydz=\text{const} \tag{8.4.16}$$

我们解得二阶问题的解如下：

$$\begin{aligned}\phi_2=&\frac{\text{ch}2k(z+h)}{\text{ch}2kh}\left[B_1A^2(Z^2+Y^2)+c.c.\right]\\&+\left[B_2A^2ZY+c.c.\right]+\frac{\text{ch}k(z+h)}{\text{ch}2kh}[B_0(Z+Y)+c.c.]\\&+B(x_1,x_2,t_1,t_2,\cdots)t\end{aligned} \tag{8.4.17}$$

$$\begin{aligned}g\eta_2=&b_1\left[A^2(Z^2+Y^2)+c.c.\right]+b_2|A|^2+\left[b_3|A|^2ZY^*+c.c.\right]\\&+\frac{\omega i}{g(1+\sigma)}[B_0(Z+Y)-c.c.]-B\end{aligned} \tag{8.4.18}$$

其中

$$B_1=\frac{3k^2i}{4\omega}\frac{(1+T^2)\left[(1-T^2)+\sigma(3-T^2)\right]}{T^2-\sigma(3-T^2)} \tag{8.4.19a}$$

$$B_2=\frac{-k^2i}{2\omega}(1+3T^2) \tag{8.4.19b}$$

$$b_1=\frac{k^2(T^2-3)}{2\left[T^2-\sigma(3-T^2)\right]} \tag{8.4.20a}$$

$$b_2=2k^2(T^2-1) \tag{8.4.20b}$$

$$b_3=\frac{k^2(T^2+1)}{1+4\sigma} \tag{8.4.20c}$$

$$B=b_2\,|A|^2 \tag{8.4.20d}$$

只要仔细地把 (8.4.5) 式展开就可以得到三阶的自由面上的边界条件，原则上没有任何困难，但太繁冗，这里不列出来了．事实上，我们并不需要解出 ϕ_3 和 η_3，而只要求出对应于 ϕ_3 的可解性条件，所以运算中只要算出相应的一次谐波项就可以了．

三阶一次谐波的可解性条件为

$$2\omega i A_{t_2}+\frac{1}{k}\omega\omega' A_{x_1x_1}+\nu|A|^2A+\frac{\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}A^*e^{-zi\omega_2 t_2}=0 \quad (8.4.21)$$

其中 ω_2 由 (8.4.12) 式决定， $\omega'=d\omega/dk>0$, $*$ 号表示复共轭

$$\nu=\frac{k^4}{2}\left[\frac{(T^2-1)(9-T^2)+\sigma(3-T^2)(T^2-7)}{T^2-\sigma(3-T^2)}\right.$$
$$\left.+\frac{9\sigma T^2}{1+\sigma}+\frac{2(1+\sigma)}{1+4\sigma}(T^2+1)^2\right] \quad (8.4.22)$$

(8.4.21) 式是自由面高度的调制方程．令 $\overline{A}=Ae^{i\omega_2 t_2}$, 则 (8.4.21) 式变为

$$2\omega\omega_2\overline{A}+2\omega i\overline{A}_t+\frac{\omega\omega'}{k}\overline{A}_{x_1x_1}+\nu\left|\overline{A}\right|^2\overline{A}+\frac{\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}\overline{A}^*=0 \quad (8.4.23)$$

回到物理变量并且去掉“-”号，可得

$$2\omega i A_t+\frac{1}{k}\omega\omega' A_{xx}+\epsilon^2\nu|A|^2A+2\omega(\omega_0-\omega)A$$
$$+2\omega^2\omega_0^2aA^*/[g(1+\sigma)]=0 \quad (8.4.24)$$

(8.4.24) 式即为非传播孤立波波幅调制的基本方程．

当 $\sigma=0$ 时， (8.4.22) 式化简为

$$\nu=\frac{1}{2}k^4\left[2T^4+3T^2+12-9T^{-2}\right] \quad (8.4.25)$$

这正是 Miles 考虑了质量守恒后得到的结果．

有些作者仅考虑局地情况，因而没有引入 (8.4.16) 式，因而 ν 的表达式不是 (8.4.22) ，而是

$$\nu = \frac{k^4}{2}\left[\frac{(T^2-1)(9-T^2)+\sigma(3-T^2)(T^2-7)}{T^2-\sigma(3-T^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{9\sigma T^2}{1+\sigma}+\frac{2(1+\sigma)}{1+4\sigma}(T^2+1)^2+4(1+\sigma)(T^2-1)^2\right] \tag{8.4.26}$$

当 $\sigma=0$ 时

$$\nu = \frac{k^4}{2}(6T^4-5T^2+16-9T^{-2}) \tag{8.4.27}$$

也与 Miles 的结果一致.

除了横向谐波的快变因子外 (我们把变换 $\overline{A}=Ae^{i\omega_2 t_2}$ 也归到这里)，非传播孤立波不随时间而变，因此

$$A_t = 0 \tag{8.4.28}$$

则方程 (8.4.24) 变为

$$\frac{\omega\omega'}{k}A_{xx}+\varepsilon^2\nu\left|A\right|^2A+2\omega(\omega_0-\omega)A+\frac{2\omega^2\omega_0^2a}{g(1+\sigma)}A^*=0 \tag{8.4.29}$$

方程 (8.4.29) 的解取决于 $\nu>0$ 或 $\nu<0$.

当 $\nu>0$ 时，(8.4.29) 式有呼吸孤立波解

$$\epsilon A = i\sqrt{\frac{4}{v}(kT\omega_0^2a-\omega\omega_0+\omega^2)}\cdot\mathrm{sech}\left[\sqrt{\frac{2k}{\omega\omega'}(kT\omega_0^2a-\omega\omega_0+\omega^2)}\;x\right] \tag{8.4.30a}$$

或

$$A = i\sqrt{\frac{-2}{\nu}(\frac{-\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}+2\omega\omega_2)}\cdot\mathrm{sech}\left[\sqrt{\frac{-k}{\omega\omega'}(\frac{-\omega^2\gamma}{2(1+\sigma)}+2\omega\omega_2)}\;x_1\right] \tag{8.4.30b}$$

由 (8.4.30) 式知：激励振幅越大，波高越高，但波宽却越小. 由于根号内需为正值，所以

$$a \geq (\omega_0 - \omega)\omega/(kT\omega_0^2) = (\omega_0 - \omega)/kT\omega_0 \tag{8.4.31}$$

这说明在 $\omega_0 > \omega$ 时激励振幅必须大于某个阈值才能产生呼吸孤立子 (即有双曲线正割形状的非传播孤立波). 由于强迫振幅 $a = O(\epsilon^2)$，所以

$$\frac{d}{d\omega_0}(kT\omega_0^2 a - \omega\omega_0 + \omega^2) = 2kT\omega_0 a - \omega < 0$$

即 ω_0 变小时，呼吸孤立子更高，实验中常选用比 (8.4.11a) 式算得的 ω 更小的 ω_0, 以得到较高的呼吸孤立子.

当 $\nu < 0$ 时，方程 (8.4.29) 有纽结孤立波解

$$\begin{aligned} \epsilon A = &\sqrt{\frac{-2}{\nu}(\omega\omega_0 - \omega + kT\omega_0^2 a)} \\ &\cdot \tanh\left[\sqrt{\frac{k}{\omega\omega'}(\omega\omega^0 - \omega^2 + kT\omega_0^2 a)}x\right] \end{aligned} \tag{8.4.32}$$

Denardo 等人 (1990) 已经在实验中观察到了这种纽结孤立波.

8.5 Stokes 波及其稳定性

以上几节讨论了浅水波的情况. 在深水中，非线性效应变弱，色散将起主导作用，可以应用摄动法来研究这类弱非线性问题. 实际上，Stokes (1847) 是最早提出变形参数法的科学家，Stokes 波是应用摄动理论成功的范例.

人们在实验中发现，经典的 Stokes 波是不稳定的，被称为 Benjamin-Feir 不稳定性 (1967)，随后 Ono (1972) 研究了有限深度的情况. 在探讨产生海浪随机性原因时，人们认为，除了大气湍流强迫外，这种 B-F 不稳定性也可能是内在的原因，于是 80 年代开始研究有风时的 B-F 不稳定性 (Bliven, Hwang 1986, Li et al. 1988,

Hara, Mei 1992, Saffman 1993)，获得了有意义的结果．所以，我们将 Stokes 波及其稳定性结合起来讨论．研究缓慢调制的弱非线波的演化，水波运动速度势应满足

$$\nabla\phi=0 \tag{8.5.1}$$

在底部

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0\ , \qquad z=-h \tag{8.5.2}$$

自由面的运动学，动力学条件应在 $z=0$ 附近进行 Taylor 展开 (准确到 $O(ka)^3$):

$$\begin{aligned}&[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}]_0+\zeta[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z})]_0+[\frac{\partial}{\partial t}u^2]_0+\frac{\zeta^2}{2}[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z})]_0\\&\qquad+\zeta[\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}u^2]_0+\frac{1}{2}[u\cdot\nabla u^2]_0+\cdots=0\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

$$-g\zeta=[\frac{\partial\phi}{\partial t}]_0+\zeta[\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial z}]_0+[\frac{u^2}{2}]_0+\frac{\zeta^2}{2}[\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial^2 z}]_0+\zeta\frac{\partial}{\partial z}[\frac{u^2}{2}]_0 \tag{8.5.4}$$

由于有缓慢调制，可采用多重尺度方法，令

$$\phi_n=\phi_n(x,x_1,x_2,\cdots,x_n;z;t,t_1,\cdots,t_n) \tag{8.5.5}$$

$$\zeta_n=\zeta_n(x,x_1,x_2,\cdots,x_n;t,t_1,\cdots,t_n) \tag{8.5.6}$$

其中 $x_n=\varepsilon^n x, t_n=\varepsilon^n t_n, \varepsilon=ka, k$ 为波数， a 为波幅，由此可导出各阶方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi_n=F_n\ , \qquad n=1,2,3 \tag{8.5.7}$$

其中，

$$F_1=0$$

$$F_2=-2\phi_{1xx_1}$$

$$F_3 = -(\phi_{1x_1x_1} + 2\phi_{1xx_2} + 2\phi_{2xx_1})$$

自由面条件

$$\Gamma\phi_n|_0 = G_n, \quad ,z = 0 \tag{8.5.8}$$

其中 $\Gamma = g\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = -[\zeta_1\Gamma_z\phi_t + (\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_t + 2\phi_{1tt_1}]$$

$$\begin{aligned} G_3 = -[&\zeta_2\Gamma_z\phi_1 + \zeta_1\Gamma_z\phi_2 + \frac{1}{2}\zeta_1^2\Gamma_{zz}\phi_1 + 2(\phi_{1x}\phi_{2x} + \phi_{1z}\phi_{2z})_t \\ &-\zeta_1(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_{tz} + \frac{1}{2}(\phi_{1x}\frac{\partial}{\partial x} + \phi_{1z}\frac{\partial}{\partial z})(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) \\ &+2\phi_{2tt_1} + 2\phi_{1z}\phi_{1zt_1} + 2\phi_{1x_1}\phi_{1xt} + 2\phi_{1x}\phi_{1xt_1} \\ &+2\phi_{1x}\phi_{1tx_1} + 2\zeta_1\phi_{1ztt_1} + 2\phi_{1tt_2} + \phi_{1t_1t_1}] \end{aligned}$$

Bernoulli 方程为

$$-g\zeta_n|_0 = H_n \tag{8.5.9}$$

其中

$$H_1 = \phi_{1t}$$

$$H_2 = \phi_{2t} + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2) + \phi_{1t_1} + \zeta_1\phi_{1zt}$$

$$\begin{aligned} H_3 = &\phi_{3t} + \phi_{1x}\phi_{2x} + \phi_{1z}\phi_{2z} + \zeta_1\phi_{2zt} + \zeta_2\phi_{1zt} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\phi_{1zzt} \\ &+\frac{1}{2}\zeta_1(\phi_{1x}^2 + \phi_{1z}^2)_z + \phi_{2t_1} + \phi_{1x}\phi_{1x_1} + \phi_{1t_2} + \zeta_1\phi_{1zt_1} \end{aligned}$$

在底面上

$$\left.\frac{\partial\phi_n}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{8.5.10}$$

不妨假定一阶解是线性行波，那么高阶解应是各种谐波的叠加，所以

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^{n} e^{im\psi}\{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\} \tag{8.5.11}$$

其中相函数 $\psi = kx - \omega t$, 并有 $\phi_{n,-m} = \phi^*_{n,m}$, $*$ 为复共轭的符号，再取缩写符号 $Q = k(z+h), q = kh$, 可得一阶解为

$$\phi_1 = \phi_{10} - \frac{g\mathrm{ch}Q}{2\omega\mathrm{ch}q}(iAe^{i\psi} + c.c.) \tag{8.5.12}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(Ae^{i\psi} + c.c.) \tag{8.5.13}$$

其中 A, ϕ_{10} 均为 $x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots$ 的函数， $c.c.$ 表示复共轭的符号，还满足色散关系：

$$\omega^2 = gk\mathrm{th}kh \tag{8.5.14}$$

从 $n = 2$ 起，由于有非齐次项，必须满足可解性条件：

$$\frac{1}{g}G_{n0} = \int_{-h}^{0} F_{n0}dz \tag{8.5.15}$$

$$\frac{1}{g}G_{n1} = \int_{-h}^{0} dzF_{n1}\frac{\mathrm{ch}k(z+h)}{\mathrm{ch}kh} \tag{8.5.16}$$

对二次以上高阶谐波，边值问题不存在齐次解，否则将不满足色散关系：二阶问题强迫项为

$$F_{20} = G_{20} = 0$$

$$F_{21} = -\frac{\omega\mathrm{ch}Q}{\mathrm{sh}q}\frac{\partial A}{\partial x_1}$$

$$G_{21} = \frac{\omega^2\mathrm{ch}q}{k\mathrm{sh}q}\frac{\partial A}{\partial t_1}$$

$$G_{22} = \frac{3\omega^2}{4\mathrm{sh}^2 q}iA^2$$

代入可解性条件，得

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}+c_g\frac{\partial A}{\partial x_1}=0\ ,\quad c_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}\tag{8.5.17}$$

所以调制波是以群速度传播的

$$\phi_2=\phi_{20}-\frac{\omega}{2k^2\mathrm{sh}q}Q\mathrm{sh}Q(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}e^{i\psi}+c.c.)$$
$$-\frac{3}{16}\frac{\omega\mathrm{ch}^2Q}{\mathrm{sh}^4q}(iA^2e^{2i\psi}+c.c.)\tag{8.5.18}$$

$$\zeta_2=\{-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi_{10}}{\partial t_1}-\frac{k}{2\mathrm{sh}^2q}|A|^2\}$$
$$+\frac{1}{2\omega}(i\frac{\partial A}{\partial t_1}e^{i\psi}+c.c.)-\frac{q}{2k}\frac{\mathrm{sh}q}{\mathrm{ch}q}(i\frac{\partial A}{\partial x_1}e^{i\psi}+c.c.)$$
$$+\frac{k\mathrm{ch}q(2\mathrm{ch}^2q+1)}{8\mathrm{sh}^3q}(A^2e^{2i\psi}+c.c.)\tag{8.5.19}$$

$n=3$ 时，只需利用其可解性条件，得

$$-iA_\tau+\alpha A_{\xi\xi}+\beta|A|^2A+\gamma A=0$$

$\tau=x_1-c_gt_1, \tau=\varepsilon t_1$, 对波包$\gamma=0$, 否则可引进$A=B\exp(-i\int\gamma d\tau)$, 化为

$$-iB_\tau+\alpha B_{\xi\xi}+\beta|B|^2B=0\tag{8.5.20}$$

其中

$$\alpha=-\frac{1}{2}\omega''(k)$$

$$\beta=\frac{\omega k^2}{16\mathrm{sh}^4q}(\mathrm{ch}4q+8-2\mathrm{th}^2q)+\frac{\omega}{2\mathrm{sh}^22q}\frac{(2\omega\mathrm{ch}^2q+kc_g)^2}{gh-c_g^2}\tag{8.5.21}$$

对无限深情形化为

$$-i\frac{\partial B}{\partial\tau}+\frac{\omega}{8k^2}B_{\xi\xi}+\frac{\omega k^2}{2}|B|^2B=0\tag{8.5.22}$$

如果考虑无调制的非线性波波幅 A 满足

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + i\omega_2 |A|^2 A = 0 \tag{8.5.23}$$

所以 $A = a_0 \exp(-i\omega_2 a_0^2 t_2)$, 其中

$$\omega_2 = \frac{\omega k^2}{16\text{sh}^4 q}(8 + \text{ch}^4 q - 2\text{th}^2 q)$$

所以

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1}{2}(a_0 e^{i\widetilde{\psi}} + c.c) \\
\widetilde{\psi} &= kx - \widetilde{\omega} t \\
\widetilde{\omega} &= \omega + \epsilon^2 \omega_2 a_0^2 \\
\widetilde{c} &= \frac{\omega}{k}[1 + c_2 (k a_0)^2]
\end{aligned} \tag{8.5.24}$$

其中

$$c_2 = \frac{1}{16\text{sh}^4 q}(8 + \text{ch}^4 q - 2\text{th}^2 q)$$

这是非线性色散关系，即波速还依赖于波幅，一般在工程上常用五阶 Stokes 波理论，有关结果可参看 (Fenton 1985, Hui 1982, 宋涛, 李家春 1988).

现在来研究上述 Stokes 波的不稳定性, 我们由非线性 Schrödinger 方程出发，令

$$B = a \exp(i \int W(\xi, \tau) d\xi) \tag{8.5.25}$$

分开实部和虚部可得

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \xi}(W a^2) = 0 \tag{8.5.26}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}[\alpha(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - W^2) + \beta a^2] = 0 \tag{8.5.27}$$

令 $a = a_0 + a', W = W'$ 并认为扰动是缓慢调制波，即

$$a' = \overline{a'} e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \tag{8.5.28}$$

$$W' = \overline{W'} e^{i(K\xi - \Omega\tau)} \tag{8.5.29}$$

可得到

$$-i\Omega\overline{a'} - \alpha a_0 iK\overline{W'} = 0 \tag{8.5.30}$$

$$\overline{a'}[\frac{\alpha}{a_0}(iK)^3 + 2\beta a_0(iK)] - i\Omega\overline{W'} = 0 \tag{8.5.31}$$

(8.5.30), (8.5.31) 有非平凡解的条件是

$$\Omega = \pm K\sqrt{\alpha^2K^2 - 2\alpha\beta a_0^2} \tag{8.5.32}$$

如果 $\alpha\beta < 0, \Omega$ 为实根，边带扰动是中性稳定的，如果 $\alpha\beta > 0$, 则

$$K^2 < 2\beta a_0^2/\alpha \tag{8.5.33}$$

时， Ω 为虚数，扰动是不稳定的，所以称为边带不稳定性 (B-F 不稳定性). 对无限水深情况

$$\left|\frac{K}{k}\right| < \sqrt{8}ka_0 \tag{8.5.34}$$

时， Stokes 波是不稳定的，这时

$$\Omega = \pm\omega[\frac{K^2}{8k^2}(\frac{K^2}{8k^2} - k^2a_0^2)]^{1/2} \tag{8.5.35}$$

在 $K = 0, K = \sqrt{8}k^2a_0$ 时增长率为零，而 $|K/k| = 2ka_0$ 时，最大增长率为

$$\left|\frac{\Omega_{\max}}{\omega}\right| = \frac{1}{2}k_0^2a_0^2 \tag{8.5.36}$$

实际上，缓慢调制的 Stokes 波存在着三组波 $\omega, \omega \pm \Omega$ 的共振相互作用. 在包络波峰附近的波要比其两侧的波运动得快些，因而有使前

面的波波长变短，后面的波波长拉长的作用. 因深水中长波的群速度大，能量使在包络波峰附近积聚，使其波峰继续增大导致不稳定，上述结果已为 Feir 的实验所证实 (Benjemin and Feir 1967). 现在来讨论有风时，对 B-J 不稳定性有什么影响， Li et al 1988 提出了简洁的物理模型，是这一问题最早的理论工作之一. 他们认为风的作用将会在水中产生速度剪切，这样问题就归结成速度剪切对 Stokes 波不稳定性的影响，而且首先考虑无限深度均匀剪切的情形，这时，可以假定有旋的速度场为

$$\boldsymbol{u} = \Omega y \boldsymbol{i} + \nabla\phi \tag{8.5.37}$$

这里， Ω 是因风引起的均匀剪切强度，由 Helmholtz 定理，速度势仍满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{8.5.38}$$

这时，自由面上的 Bernoulli 方程应为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 + \frac{p}{\rho} + g\zeta - \frac{1}{2}\Omega^2\zeta^2 - \Omega\psi = \text{const.} \tag{8.5.39}$$

其中 ψ 可理解为流函数，满足 $\psi_z = \phi_x, \psi_x = -\phi_z$，于是边界条件应为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + [\frac{\partial\phi}{\partial x} + \Omega\zeta]\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \phi_z = 0\ , \quad z = \zeta(x,t) \tag{8.5.40}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + \Omega\zeta\phi_x + g\zeta - \Omega\psi = \text{const.},\ z = \zeta(x,t) \tag{8.5.41}$$

同样地，我们可以得到均匀剪切流中的 Stokes 波

$$\phi = \epsilon e^{kz}\sin kX + \epsilon^2\frac{1}{4}\overline{\Omega}(\overline{\Omega}+3)e^{2ky}\sin 2kX \tag{8.5.42}$$

$$\eta = \epsilon\cos kX + \epsilon^2[-\frac{1}{4}\overline{\Omega}(\Omega+2) + \frac{1}{4}(\overline{\Omega}^2 + 4\overline{\Omega} + 2)\cos 2kX] \tag{8.5.43}$$

以及色散关系

$$c = c_0[1 + \epsilon^2\frac{1 + 2\overline{\Omega} + \frac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \frac{1}{8}\overline{\Omega}^4}{2+\overline{\Omega}}] \tag{8.5.44}$$

其中 $X = x - ct, \overline{\Omega} = \Omega/\omega, c_0 = \sqrt{\dfrac{g}{k(1+\overline{\Omega})}}$

下面我们来讨论剪切流中 Stokes 波的稳定性，同无剪切时类似地，可假定

$$\xi = \epsilon A(\xi, \tau) e^{i(kx-\omega t)} + c.c. \tag{8.5.45}$$

其中 $\xi = \epsilon(x - c_g t), \tau = \epsilon^2 t, c_g$ 是群速度，同样地可导出关于 A 的非线性 Schrödinger 方程

$$-i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha A_{\xi\xi} + \beta A|A|^2 = 0 \tag{8.5.46}$$

其中

$$\alpha = \frac{\omega}{8k^2}\frac{(1+\overline{\Omega})^2}{(1+\dfrac{\overline{\Omega}}{2})^3} \tag{8.5.47}$$

$$\beta = \frac{1 + 2\overline{\Omega} + \frac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \frac{1}{8}\overline{\Omega}^4}{2+\overline{\Omega}}\omega k^2 \tag{8.5.48}$$

当 $\overline{\Omega} = 0$ 时，(8.5.46) 就是缓慢调制的 Stokes 波的非线性 Schrödinger 方程 (8.5.22). 由方程可见， $\alpha\beta < 0$ 时，即

$$1 + 2\overline{\Omega} + \frac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \frac{1}{4}\overline{\Omega}^4 < 0 \tag{8.5.49}$$

时才是稳定的，如果上式为正，那么在

$$\left|\frac{K}{k}\right| < \sqrt{8}\sqrt{1 + 2\overline{\Omega} + \frac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \frac{1}{8}\overline{\Omega}^4}\,\frac{1+\dfrac{\overline{\Omega}}{2}}{1+\overline{\Omega}}a_0 k \tag{8.5.50}$$

时是不稳定的，在

$$\frac{K}{k} = 2\sqrt{1 + 2\overline{\Omega} + \frac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \frac{1}{8}\overline{\Omega}^4}\,\frac{1+\frac{\overline{\Omega}}{2}}{1+\overline{\Omega}}a_0 k \tag{8.5.51}$$

时，最大不稳定增长率为

$$\left|\frac{\Omega}{\omega}\right|_{\max} = \frac{1 + 2\overline{\Omega} + \dfrac{5}{4}\overline{\Omega}^2 - \dfrac{1}{8}\overline{\Omega}^4}{2+\overline{\Omega}}a_0^2 k^2 \tag{8.5.52}$$

所以，我们的结论是：弱风时，Stokes 波仍是不稳定的，强风时，B-J 不稳定性会受到抑制. 在加拿大水研究中心风水槽中进行了实验研究，测量了风速在 1.4m/s, 10.5m/s 时，下游 12.0, 24.1, 34.2m 处的频谱，证实了上述结论，还测量了不同风速时，包括上侧带与下侧带的不稳定增长率，与理论结果一致 (图 8.5.1).

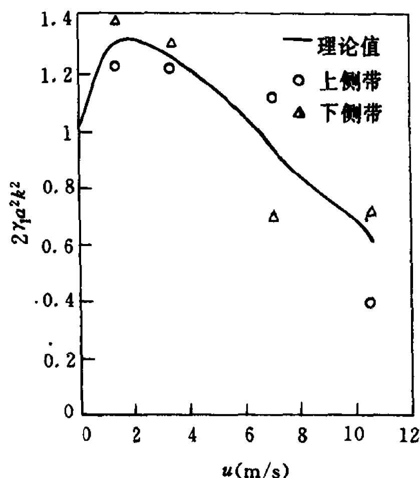


图 8.5.1 Stokes 波的不稳定增长率与理论结果 (实线) 的比较

在 Bliven, Huang (1986) 的实验中，同样发现了强风时 B-J 不稳定受到抑制的现象. Hara, Mei (1991) 的研究结果在线性速度廓线时也与上述理论一致，为了与实际海面情况比较，可取速度廓线为对数分布，才能达到定量的一致. Li et al. (1994) 进一步研究了有限深度的情况，如果取 $\overline{\Omega} = 0$, 重新获得了 Ono(1972) 的经典结果，即 $q < 1.363$ 时，Stokes 波是稳定的，这样，在有限深度时，发现在浅水和强风时均有抑止不稳定的效果，所以，可产生两个稳定区域.

8.6 气泡的参数共振

尽管人们知道气泡表面振动是空蚀和波浪破碎产生的噪声的原因，但潺潺流水、波浪破碎和水下喷管射出的气泡的发声机理还远未被人们完全了解. 实验指出，气泡发声的频率接近于球形气泡的径向振动模式 (所谓 “呼吸模式”) 的频率. 按照线性理论，只有各向同性的具有单极子形式的呼吸模式能有效地辐射声波，其他的模式只产生局部的扰动，因为它们的体积守恒.

Longuet-Higgins(1989) 指出，由二阶理论，一个频率为 σ 的一阶非各向同性模式能够产生频率为其二倍的二阶各向同性模式. 这种机制与表面重力波的下述机制很相似：深入水下不到一个波长的频率为 σ 的一阶驻波可以产生频率为 2σ 的二阶压力，且此压力可达到很大深度而不衰减.

我们研究的气泡半径从 0.01cm 到 1cm. 风波生成的气泡正好在这个范围之内. 我们着重关心水面附近的气泡，所以可把气泡内的压力近似为一个大气压.

下面我们提出弱阻尼情况下气泡共振相互作用理论. 频率为 σ_n 的非各向同性模式 (变形模式) 之间存在非线性耦合. 由于入射声波的共振散射也是探察海洋中的气泡的一种机制，我们考察强迫入射声波的影响.

作为参考，我们写出大家熟知的不计及表面张力的半径为 R 的充气气泡的共振辐射频率的公式

$$\omega_0 = \sqrt{3\gamma p_b/\rho R^2} \tag{8.6.1}$$

其中 p_b 是气泡内的压力， γ 是空气的比热比， ρ 为水密度.

在海洋表面附近， p_b 约为一个大气压，气泡的共振频率约为 $f_0 = \omega_0/2\pi = 327/R\,\text{Hz}$, 其中 R 是以 cm 为单位的气泡半径. 因此， $kR = \dfrac{2050}{c} \sim O(10^{-2})$, 可作为小参数 ε. 假定气泡在流体中被

振幅为 A 的入射声波所共振，a 为气泡振动的振幅，于是可以期望

$$A/a = O(kR) \equiv O(\varepsilon) \ll 1 \tag{8.6.2}$$

在气泡表面，一阶振动量的量级为 $O(a/R)$，非线性影响的量级为 $O(a/R)^2$. 入射声波的一阶扰动和非线性分别为 $O(kA)$ 和 $O(kA)^2$ 的量级. 两个非线性之比为

$$(kA)^2/(a/R)^2 = (A/a)^2(kR)^2 = O(\varepsilon^4) \ll 1 \tag{8.6.3}$$

因此，考虑气泡表面的非线性时，远场声波的非线性可以忽略，所以用线性波动方程

$$c^2\nabla^2\varphi = \varphi_{tt} \tag{8.6.4}$$

描述远场就足够了，而速度和压力与 φ 的关系为

$$p = -\rho\varphi_t, \qquad V = \nabla\varphi, \tag{8.6.5}$$

在气泡附近，$r = O(R)$，水的压缩性可忽略，其误差为 $O(kR)^2$ 速度势 φ 满足拉普拉斯方程.

对 $a/R \ll 1$ 的小振幅气泡振动，Longute-Higgins 在平均气泡半径上展开运动学和动力学边界条件. 在轴对称情况，令气泡界面为 $r = R + \eta(t,\theta)$，精确到 a/R 的二阶量，他给出

$$\eta_t - \varphi_r = \eta\varphi_{rr} - \frac{1}{R^2}\eta_\theta\varphi_\theta\,, \qquad r = R \tag{8.6.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi_t + \frac{T}{\rho R^2}(2+\nabla_s^2)\eta - R\omega_0^2\overline{\eta} = -\eta\varphi_{rt} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \\ + \frac{T}{\rho R^3}2\eta(1+\nabla_s^2)\eta + \omega_0^2(\overline{\eta}^2 - \frac{3}{2}(\gamma+1)\overline{\eta}^2), \quad r = R\end{aligned} \tag{8.6.7}$$

其中 ω_0 由 (8.6.1) 式给出，T 为表面张力系数，

$$\nabla_s^2 f \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f) \tag{8.6.8}$$

$\overline{\eta}$ 记作球面平均

$$\overline{\eta}=\frac{1}{4\pi}\int_{\theta}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\pi}\eta\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\eta\sin\theta d\theta \tag{8.6.9}$$

把 η 和 φ 按小参数 ε 展开

$$\begin{aligned}\eta&=\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots\\ \varphi&=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\cdots\end{aligned} \tag{8.6.10}$$

首项近似满足方程

$$\eta_{1t}-\varphi_{1t}=0 \tag{8.6.11}$$

$$\varphi_{1t}+\frac{T}{\rho R^2}(2+\nabla_s^2)\eta_1-R\omega_0^2\overline{\eta}_1=0 \tag{8.6.12}$$

首项解由各向同性模式和有子午线方向变形的各向异性模式组成

$$\eta_1=a_0e^{-i\omega t}+a_nP_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_n t}+* \tag{8.6.13}$$

$$\varphi_1=b_0\frac{R}{r}e^{-i\omega t}+b_n(\frac{R}{r})^{n+1}P_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_n t}+* \tag{8.6.14}$$

其中 $P_n(\cos\theta)$ 是 n 阶 Legendre 多项式， * 号表示复共轭项，振幅 a_0,a_n,b_0,b_n 随缓变时间 $t_1=\varepsilon t$ 而变，且

$$b_0=i\omega Ra_0,\qquad b_n=\frac{i\sigma_n+Ra_n}{n+1} \tag{8.6.15}$$

这些模式的特征频率由下式给出

$$\begin{aligned}\omega^2&=\omega_0^2-2T/(\rho R^3)\\ \sigma_n^2&=(n-1)(n+1)(n+2)T/(\rho R^3)\end{aligned} \tag{8.6.16}$$

尽管在一般的初始条件下所有 $n=2,3,4,\cdots$ 的模式都可能存在，但是我们只着重注意呼吸模式和第 n 次变形模式之间的接近于共振的相互作用，它们的频率有下面的共振条件

$$\omega=2\sigma_n+\varepsilon\sigma\sigma_n \tag{8.6.17}$$

由于气泡半径不同，正确的共振条件很难满足，它们之间的失谐为 $\varepsilon\sigma\sigma_n, \sigma \le O(1)$.

在气泡的平均表面上，二阶解必须满足下列边界条件

$$\eta_{2t} - \varphi_{2r} = \eta_1\varphi_{1rr} - \frac{1}{R^2}\eta_{1\theta}\varphi_{1\theta} - \eta_{1t_1} \tag{8.6.18}$$

$$\varphi_{2t} + \frac{T}{\rho R^2}(2+\nabla_s^2)\eta_2 - R\omega_0^2\overline{\eta}_2 = -\eta_1\varphi_{1rt} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2$$
$$+\frac{T}{\rho R^3}(2\eta_1)(1+\nabla_s^2)\eta_1 + \omega_0^2\left[\overline{\eta}_1^2 - \frac{3}{2}(\gamma+1)\overline{\eta}_1^2\right] - \varphi_{1t_1} \tag{8.6.19}$$

φ_2 是轴对称的、满足拉普拉斯方程，因此， φ_2, η_2 可以写为

$$\eta_2 = c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \tag{8.6.20}$$

$$\varphi_2 = d_0\frac{R}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} d_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) + \left[\overline{d}_0 e^{-i\omega t} + *\right] \tag{8.6.21}$$

其中 c_0, c_n, d_0 和 d_n 是 t 和 t_1 的待定函数, 须要由 (8.6.18), (8.6.19) 式决定，$\overline{d}_0$ 只依赖于 t_1, 由与外场解匹配而定. 把 (8.6.20), (8.6.21) 代入 (8.6.18), 取球面平均，再利用 Legendre 函数的性质可得

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{1}{R}d_0 = \left[\frac{2i\omega}{R}(a_0^2 e^{-2i\omega t} + a_0 a_0^*)\right.$$
$$\left. + \frac{2i\sigma_n}{(2n+1)R}(a_n^2 e^{-2i\sigma_n t} + a_n a_n^* - \frac{da_0}{dt_1}e^{-i\omega t}\right] + * \tag{8.6.22}$$

把 (8.6.20) 和 (8.6.21) 式代入 (8.6.19), 进行同样运算可得

$$\frac{\partial d_0}{\partial t} - R\omega^2 c_0 = \left\{\omega^2(a_0^2 e^{-2i\omega t} + a_0 a_0^*)\right.$$
$$+ \frac{\sigma_n^2}{2n+1}(a_n^2 e^{-2i\sigma_n t} + a_n a_n^*)$$
$$+ \frac{\omega^2}{2}(a_0^2 e^{-2i\omega t} - a_0 a_0^*) + \frac{\sigma_n^2}{2(n+1)}(a_n^2 e^{-2i\sigma_n t} - a_n a_n^*)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2T}{\rho R^3}\left[(a_0^2 e^{-2i\omega t}+a_0 a_0^*)\right.\\
&\left.+\frac{1-n-n^2}{2n+1}(a_n^2 e^{-2i\sigma_n t}+a_n a_n^*)\right]\\
&+\omega_0^2\left[-\frac{3\gamma+1}{2}(a_0^2 e^{-2i\omega t}+a_0 a_0^*)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2n+1}(a_n^2 e^{-2i\sigma_n t}+a_n a_n^*)\right]\\
&\left.+\left[-iR\omega\frac{da_0}{dt_1}e^{-i\omega t}+i\omega\overline{d}_0 e^{-i\omega t}\right]\right\}+* \qquad (8.6.23)
\end{aligned}
$$

从 (8.6.22) 和 (8.6.23) 式消去 d_0 可得关于 c_0 的方程. 为使 c_0 有均匀有效解，其长期项应为零，于是得到

$$
\frac{da_0}{dt_1}=-is_0 a_n^2 e^{i\sigma\sigma_n t_1}+\frac{\overline{d}_0}{2R} \qquad (8.6.24)
$$

其中

$$
s_0=\frac{(4n-1)\sigma_n}{8(n+1)(2n+1)R} \qquad (8.6.25)
$$

类似地，把 (8.6.20) 和 (8.6.21) 式代入 (8.6.18) 和 (8.6.19) 等号两边乘以 $P_n(\cos\theta)$, 取球面平均，消去 d_n, 可得 c_n 的方程，消去长期项可得

$$
\frac{da_n}{dt_1}=-is_n a_0 a_n^* e^{-i\sigma\sigma_n t_1} \qquad (8.6.26)
$$

其中

$$
s_n=\frac{(4n-1)\sigma_n}{2R} \qquad (8.6.27)
$$

方程 (8.6.24) 和 (8.6.26) 描述了复振幅 a_0, a_n 的发展是基本方程. 其中的系数 $\overline{d}_0$ 由远场匹配决定. 近场的速度势 (精确到二阶) 为

$$
\begin{aligned}
\varphi=&\left\{\varepsilon\left[b_0\frac{R}{r}e^{-i\omega t}+b_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_n t}\right]\right.\\
&\left.+\varepsilon^2\left[d_0\frac{R}{r}+\sum_n d_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)+\overline{d}_0 e^{-i\omega t}\right]\right\}+*
\end{aligned} \qquad (8.6.28)
$$

其中 b_0 和 b_n 由 (8.6.15) 式决定.

按前面的量级估计，远场 ($r \gg R$) 的声波势 ϕ 服从线性波动方程，可以写为

$$
\begin{aligned}
\phi = \ & \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 = \left\{\varepsilon\left[B_n P_n(\cos\theta) h_n(k_n r) e^{i(k_n r - \sigma_n t)}\right]\right. \\
& \left. \varepsilon B_0 \frac{1}{kr} e^{i(kr-\omega t)} + \varepsilon^2 \frac{ip_0}{\rho\omega} e^{i(kx-\omega t)}\right\} + * + \cdots
\end{aligned}
\tag{8.6.29}
$$

其中 $k_n = \sigma_n/c$, h_n 记为相应于辐射波的第一类 Hankel 球函数，系数 B_0, B_n 可以包含 $O(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon^2)$ 项. 在二阶项中包含了幅度为 p_0 、频率与呼吸模式相同的平面入射压力波.

把远场和近场的速度势匹配到 $O(\varepsilon^2)$, 即令 $\frac{r}{R} \gg 1$ 时的 (8.6.28) 式和 $kr \ll 1$ 时的 (8.6.29) 式相等，得到

$$
b_0 = B_0/kR = i\omega R a_0 \quad 或 \quad B_0 = i\omega kRRa_0 = O(\varepsilon) \tag{8.6.30a}
$$

$$
b_n = -B_n \frac{(2n-1)!!}{(k_n R)^{n+1}} \quad 或 \quad B_n = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{8.6.30b}
$$

$$
\bar{d}_0 = -\left(\frac{kR}{\varepsilon}\right)\omega R a_0 + \frac{ip_0}{\rho\omega} \tag{8.6.30c}
$$

这意味着：从气泡向外辐射的声波只是 $O(\varepsilon)$ 的量级，而且主要来自呼吸模式.

最终我们从 (8.6.24) 和 (8.6.26) 得到的 a_0 和 a_n 的发展方程为

$$
\frac{da_0}{dt_1} = -is_0 a_n^2 e^{i\sigma\sigma_n t_1} - \frac{1}{2}\frac{kR}{\varepsilon}\omega a_0 + \frac{if_0}{2\rho\omega R} e^{i\sigma_n \Omega t_1} \tag{8.6.31}
$$

$$
\frac{da_n}{dt_1} = -is_n a_0 a_n^* e^{-i\sigma\sigma_n t_1} \tag{8.6.32}
$$

其中，我们已经把平面入射压力波的振幅 p_0 表示为

$$
p_0 = f_0 e^{i\sigma_n \Omega t_1} \tag{8.6.33}
$$

f_0 是复数， (8.6.31) 式的第二项代表辐射阻尼.

由 (8.6.25) 和 (8.6.27) 式可知，对于大的 $n, s_0 \sim \sigma_n/(4nR)$ 是小的，$s_n \sim 2n\sigma_n/R$ 比较大. 因此，要影响 a_0, a_n 必须很大，而小的 a_0 却能影响 a_n. 还可看出，频率为 σ_n 的平面入射波在二阶近似内，对这些发展方程没有影响. 由 (8.6.32) 式可知，一个变形模式要参加共振相互作用，必须有非零的初值.

引入无量纲化如下：

$$\tau = t_1/T_0, \quad T_0 = \sqrt{2\rho\omega R/(|f_0|s_n)}$$

$$A_0 e^{i\Omega\sigma_n T_0 \tau} = (T_0 s_n) a_0, \quad A_n e^{\frac{1}{2}i(\Omega-\sigma)\sigma_n T_0 \tau} = T_0\sqrt{s_0 s_n a_n}$$

其中 $\varepsilon^2|f_0|$ 是远场入射声波的振幅. (8.6.31) 和 (8.6.32) 式变为自治系统

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -\mu_{10}A_0 - i\mu_{20}A_0 - iA_n^2 + iF \tag{8.6.34}$$

$$\frac{dA_n}{d\tau} = -i\mu_{2n}A_n - iA_0A_n^* \tag{8.6.35}$$

其中 F 是模为 1 的复数 $p + iq$,

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= \frac{1}{2}\frac{kR}{\varepsilon}\omega T_0, \\ \mu_{20} &= \Omega\sigma_n T_0, \\ \mu_{2n} &= (\Omega - \sigma)\sigma_n T_0 \end{aligned} \tag{8.6.36}$$

把 (8.6.34) 和 (8.6.35) 式的虚部和实部分开，得

$$\frac{d\alpha_0}{d\tau} = -\mu_{10}\alpha_0 + \mu_{20}\beta_0 + 2\alpha_n\beta_n - q \tag{8.6.37a}$$

$$\frac{d\beta_0}{d\tau} = -\mu_{20}\alpha_0 - \mu_{10}\beta_0 - (\alpha_n^2 - \beta_n^2) + p \tag{8.6.37b}$$

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = \mu_{2n}\beta_n + (\beta_0\alpha_n - \alpha_0\beta_n) \tag{8.6.37c}$$

$$\frac{d\beta_n}{d\tau} = -\mu_{2n}\alpha_n - \alpha_0\alpha_n - \beta_0\beta_n \tag{8.6.37d}$$

其中

$$\alpha_0 + i\beta_0 = A_0, \quad \alpha_n + i\beta_n = A_n$$

我们引入能量守恒,

$$\frac{d}{d\tau}(|A_0|^2 + |A_n|^2) = -2\mu_{10}|A_0|^2 + (iFA_0^* + *) \tag{8.6.38}$$

该式可用来校核数值计算.

当 $F = \mu_{10} = \mu_{20} = \mu_{2n} = 0$ 时, 也就是没有入射声波强迫项, 不计辐射阻尼且没有失谐时, (8.6.34), (8.6.35) 式变为

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -iA_n^2, \quad \frac{dA_n}{d\tau} = -iA_0A_n^* \tag{8.6.39}$$

若初始条件合适, (8.6.39) 有解

$$A_0 = i\,\mathrm{th}(\tau + \tau_0), \quad A_n = i\,\mathrm{sech}(\tau + \tau_0) \tag{8.6.40}$$

这就是在非线性光学中著名的所谓二次谐波产生解. 即当频率为 σ_n 的高强度的入射光通过石英晶体时会产生频率为 $2\sigma_n$ 的二次谐波. 若 $\tau_0 = 0$, 则 $\tau = 0$ 时 $|A_0| = 0, |A_n| = 1$, 而当 $\tau \to \infty$ 时, $|A_0| \to 1$ 而 $|A_n| \to 0$. 这就是说, 能量由频率为 σ_n 的变形模式完全转移到频率为 $2\sigma_n = \omega$ 的二次谐波 (呼吸模式) 上去了, 使得原来不存在的二次谐波从一次谐波中吸取能量, 逐渐成长而被激发, 而原来存在的一次谐波则因被二次谐波抽吸能量而完全消失. 在浅水长波中也有类似的现象.

方程组 (8.6.34), (8.6.35) 有二个平衡点.

第一个平衡点为

$$\overline{\alpha}_n = \overline{\beta}_n = 0$$

$$\overline{\alpha}_0 = \frac{-\mu_{10}q + \mu_{20}p}{\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2}, \qquad \overline{\beta}_0 = \frac{\mu_{20}q + \mu_{10}p}{\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2}$$

物理上, 这是强迫力和呼吸模式的辐射阻尼之间的平衡, 而变形模式不出现. 由该平衡点的线性稳定性研究可知: 呼吸模式是稳定的,

而变形模式的稳定性由下式决定

$$(\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2)\mu_{2n}^2 \begin{matrix} >1 & 稳定 \\ <1 & 不稳定 \end{matrix} \tag{8.6.41}$$

这意味着，当 $\Omega \approx \sigma$ 时，即强迫力的失谐与变形模式的失谐相当接近时，变形模式总是不稳定的，它可以从呼吸模式吸取能量而成长.

第二个平衡点可用下法求得. 令

$$A_0 = |A_0|e^{i\theta_0}, \quad A_n = |A_n|e^{i\theta_n}, \quad F = e^{i\theta_F} \tag{8.6.42}$$

方程组 (8.6.34), (8.6.35) 化为

$$\frac{d|A_0|}{d\tau} = -\mu_{10}|A_0| + |A_n|^2\sin(2\theta_n - \theta_0) - \sin(\theta_F - \theta_0) \tag{8.6.43a}$$

$$|A_0|\frac{d\theta_0}{d\tau} = -\mu_{20}|A_0| - |A_n^2|\cos(2\theta_n - \theta_0) + \cos(\theta_F - \theta_0) \tag{8.6.43b}$$

$$\frac{d|A_n|}{d\tau} = -|A_0||A_n|\sin(2\theta_n - \theta_0) \tag{8.6.43c}$$

$$|A_n|\frac{d\theta_n}{d\tau} = -\mu_{2n}|A_n| - |A_0||A_n|\cos(2\theta_n - \theta_0) \tag{8.6.43d}$$

平衡点由下式决定

$$|A_0| = (-1)^{n-1}\mu_{2n} \tag{8.6.44a}$$

$$|A_n| = \left\{\mu_{20}\mu_{2n} + (1 - \mu_{10}^2\mu_{2n}^2)^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{8.6.44b}$$

$$\sin(\theta_F - \theta_0) = (-1)^n\mu_{2n}\mu_{10}, \tag{8.6.44c}$$

$$\cos(\theta_F - \theta_0) = \frac{1}{|A_0|}(\mu_{20}|A_0|^2 - \mu_{2n}|A_n|^2) \tag{8.6.44d}$$

$$\sin(2\theta_n - \theta_F) = -\mu_{10}\mu_{2n}, \tag{8.6.44e}$$

$$\cos(2\theta_n - \theta_F) = \sqrt{1 - \mu_{10}^2\mu_{2n}^2} \tag{8.6.44f}$$

对于 $\mu_{2n}=0$, 即 $\Omega=\sigma$ 的情况，第二个平衡点为

$$\overline{\alpha}_0=\overline{\beta}_0=0 \tag{8.6.45a}$$

$$|A_n|=1 \tag{8.6.45b}$$

$$\overline{\alpha}_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+p} \tag{8.6.45c}$$

$$\overline{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-p} \tag{8.6.45d}$$

这意味着强迫力与变形模式频率相同时，呼吸模式最终会消失，而变形模式与强迫力之间则维持平衡.

第二个平衡点的线性稳定性分析导致下列特征问题:

$$J_4\lambda^4+J_3\lambda^3+J_2\lambda^2+J_1\lambda+J_0=0 \tag{8.6.46}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_0&=4(\overline{\alpha}_n^2+\overline{\beta}_n^2)r\\
J_1&=4\mu_{10}(\overline{\alpha}_n^2+\overline{\beta}_n^2)\\
J_2&=4(\overline{\alpha}_n^2+\overline{\beta}_n^2)+\mu_{10}^2+\mu_{20}^2\\
J_3&=2\mu_{10}\\
J_4&=1\\
r&=\sqrt{1-\mu_{10}^2\mu_{2n}^2}
\end{aligned}$$

(8.6.46) 式有实数部分小于零的根的充要条件如下:

$$J_0>0,\quad J_1>0,\quad J_3J_4>0 \tag{8.6.47}$$

$$J_1(J_2J_3-J_1J_4)-J_0J_3^2>0 \tag{8.6.48}$$

(8.6.47) 式永远满足. 条件 (8.6.48) 限制了参数的范围. 固定 R 和 n, 通过计算可以找出不稳定的范围 $\Omega_-<\Omega<\Omega_+$. 数值计算发现，这

将导致 Hopf 分岔而进入混沌状态. 有闪趣的计者可参考周显初和梅强中 (1992) 及 Mei and Zhou(1991) 的文章.

习 题

8.1 Mathieu 方程 $\ddot{u}+(\delta+2\varepsilon\cos 2t)u=0$, 试问:

(1)δ 为何值时, 直接摄动展开式的首项失效?

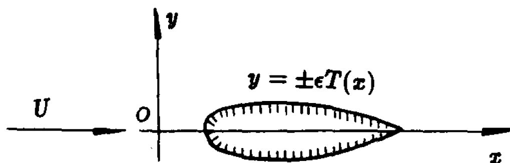
(2)$\delta=1+\varepsilon\delta_1$ 时, 用 PLK 方法求其解的稳定区与不稳定区的分界线及周期 (二项).

(3)$\delta=1+\varepsilon\delta_1$ 时用多重尺度法和平均化方法求首项近似解.

8.2 考虑如图所示的在理想平面定常超音速流中薄对称机翼的无攻角均匀绕流, 其速度向量 $\boldsymbol{q}=U\,\mathrm{grad}\,(x+\phi)$, 无旋等熵运动的势函数 ϕ 满足

$$\phi_{yy}-B^2\phi_{xx}=M^2\left[\frac{r-1}{2}(2\phi_x+\phi_x^2+\phi_y^2)(\phi_{xx}+\phi_{yy})+\right.$$

$$\left.+(2\phi_x+\phi_x^2)\phi_{xx}+2(1+\phi_x)\phi_y\phi_{xy}+\phi_y^2\phi_{yy}\right]$$



对称薄翼绕流

其中 $B^2=M^2-1$, M 为马赫数, 边界条件为

$$\phi_y=\varepsilon T'(x)(1+\phi_x)\,,\quad 在y=\varepsilon T(x)\,,\quad (0\le x\le l)$$

其中 $y=\pm\varepsilon T(x)$ 为机翼表面， l 为机翼的弦长，上游边界条件为

$$\phi=0$$

试用直接展开求出 $\phi=\varepsilon\phi_1+\varepsilon^2\phi_2+O(\varepsilon^3)$, 讨论其一致有效性.

为避免奇性，用 Lighthill 方法

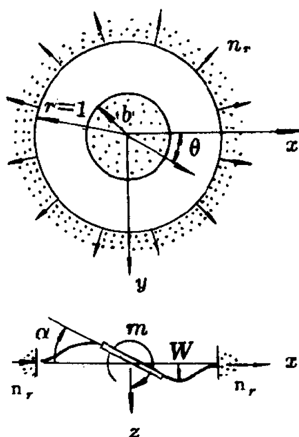
$$x-By=\xi+\varepsilon G_1(\xi,\eta)+\cdots$$

$$y=\eta$$

改进特征线的方程，求出 G_1 及一阶的一致有效展开.

8.3 考虑如图所示的没有表面荷载的薄形环状板的非对称弯曲问题，板所受的均匀径向予应力大到足以在以后的运动中保持为常数 n_r, 板的外缘固定, 其中间有一刚性物体, 一力矩作用于刚性物体上使平板在垂直于板面方向有一位移 W, 受下述方程控制

$$\varepsilon^2\nabla^4\omega-\nabla^2\omega=0$$



预应力圆环平板的非对称弯曲

其中 $\varepsilon^2=D/r_1^2n_r\ll 1$,$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ 为抗弯刚度， h 为板厚， E,V 分别为杨氏模量和泊松比， n_r 为单位长度上的平面预应

力，r_1 为外圆半径，ω 用 h 来无量纲化，其边界条件为

$$r = b \text{ 处}，\quad \omega = b\alpha\cos\theta，\quad \frac{\partial\omega}{\partial r} = \alpha\cos\theta$$

$$r = 1 \text{ 处}，\quad \omega = \frac{\partial\omega}{\partial r} = 0$$

试用边界层理论求其两项解.

8.4 考虑二维理想不可压缩流体中的重力表面波，水深 h =const，试用多重尺度方法导出有缓慢调制的弱非线性波演化的立方 Schrödinger 方程.

8.5 考虑二维、理想、不可压、连续分层流体的运动，一小振幅 (但有限) 长波在底面缓变的静止流体中传播，试求出自由面扰动 η 的首项近似应满足的方程.

(提示：引进与波一起运动的坐标系 $\xi = \int \frac{dx}{c(x)} - t$，$X = \varepsilon x$，$c$ 为波的相速. 假定垂直方向的速度扰动 $v = -\eta_{1xi}(\xi, x)\phi(x, y)$，$\phi$ 为 Sturm-Liouville 型本征问题的解，由二阶量方程的相容性条件得到缓变系数的 KdV 方程.)

8.6 考虑二维不可压缩流体在缓变底面上的流动，有一定常无旋的基本流动，一小振幅 (但有限) 重力长波在其上传播，试给出自由面位移扰动的首项近似应满足的方程.

第九章　级数的分析与改进

在前面几章，我们已经可以用各种方法求得物理问题的渐近解. 为了解决实际的工程问题，必须进行求和的计算. 通常，由于计算的困难，一般只求出二、三项，这在小 (或大) 参数时是较准确的，但当参数适中时，收敛变慢，甚至发散或近似程度变差. 因此，我们要通过分析其奇点的位置与性质，提出改进级数的措施，加快收敛速度，扩大级数解的适用范围. 本章的目的主要研究如何改进已经得到的延伸了的摄动级数. 内容安排如下：首先将级数求和的概念拓广，讨论发散级数广义和的定义与计算；然后研究级数的奇性分析，在此基础上再来讨论级数解收敛性改进与解析延拓的方法.

9.1　发散级数求和

由于在我们的思想中，认为级数和就是部分和的极限，这样一个概念是根深蒂固的. 所以，对什么是渐近级数，什么是发散级数的和，这些新概念往往是不容易理解的. 因此，我们必须要冲破传统观念，才能接受发散级数和的定义 (Kline 1972). 但这种定义绝不是杜撰的，我们要求它必须是原先意义上级数和的拓广. 也就是说，在新的定义下，收敛级数的和必须是与原先定义的和相一致. 这种求和法，我们称为是正则的，这样的和我们叫广义和 (Titchmarsh 1952, 李家春 1981 b).

现在列举下述几种正则求和法的定义：

1. Abel 求和法：已知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{9.1.1}$$

由此作相应的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.1.2}$$

该级数在 $0<x<1$ 时收敛于 $f(x)$, 且存在极限

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=A \tag{9.1.3}$$

我们称该极限 A 为级数 (9.1.2) 的 Abel 广义和. 由 Abel 定理, 我们知道 Abel 求和是正则的. 上述定义显然与 Euler 认为级数的和是导出这个级数的函数的值的概念是一致的. 这里, 采用了"值"这个词, 就比"和"这个词要好理解得多了.

2. Cesaro 求和法: 已知级数 (9.1.1), 我们由该级数的序列 $\{a_n\}$ 构成新的序列

$$\begin{aligned}
&S_n^{(0)}=a_0+a_1+\cdots+a_n, \quad C_n^{(0)}=S_n^{(0)}\\
&S_n^{(1)}=S_0^{(0)}+S_1^{(0)}+\cdots+S_n^{(0)}, \quad C_n^{(1)}=\frac{S_n^{(1)}}{n+1}\\
&\cdots\cdots\\
&S_n^{(r)}=S_0^{(r-1)}+S_1^{(r-1)}+\cdots+S_n^{(r-1)}\\
&C_n^{(r)}=\frac{S_n^{(r)}}{\begin{pmatrix} n+r\\ r\end{pmatrix}}
\end{aligned} \tag{9.1.4}$$

式中

$$\begin{pmatrix} n+r\\ r\end{pmatrix}=\frac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}{r!}$$

当 $n\to\infty$ 时, 某个极限

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{(r)}=S(C,r) \tag{9.1.5}$$

存在, 我们称该级数为第 r 次 Cesaro 可和的, 其和为 $S(C,r)$. 由于

$$S_n^{(r)}=S_n^{(0)}+\begin{pmatrix} r\\ 1\end{pmatrix}S_{n-1}^{(0)}+\cdots+\begin{pmatrix} r+n-1\\ n\end{pmatrix}S_0^{(0)}$$

又有

$$\binom{r-1}{0}+\binom{r}{1}+\cdots+\binom{r+n-1}{n}=\binom{r+n}{n}$$

所以，这是部分和的带权平均值求和，若 $r=1$ 即算术平均求和.

若 $S(C,r)$ 存在，我们可证明 $S(C,r+1)$ 亦存在这里因为由

$$\begin{aligned}
C_n^{(r+1)}-S(C,r) &= \frac{1}{\binom{r+n+1}{r+1}}\sum_{i=0}^{n}S_i^{(r)}-S(C,r)\\
&= \frac{1}{\binom{r+n+1}{r+1}}\left\{\left[S_o^{(r)}-\binom{r}{r}S(C,r)\right]\right.\\
&\quad +\left[S_1^{(r)}-\binom{r+1}{r}S(C,r)\right]+\cdots\\
&\quad \left.+\left[S_n^{(r)}-\binom{r+n}{r}S(C,r)\right]\right\}
\end{aligned}$$

由于 $S(C,r)$ 的存在，在 $n>N$ 时，可使

$$\left|\frac{S_n^{(r)}}{\binom{r+n}{r}}-S(C,r)\right|<\varepsilon$$

$n < N$ 时，$S(C,r)$，$C_n^{(r)}$ 这些量又是有界的

$$\left|C_n^{(r+1)} - S(C,r)\right| < \frac{1}{\begin{pmatrix} r+n+1 \\ r+1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} r+n \\ r \end{pmatrix} \cdot \Big[2MN + (n-N)\varepsilon\Big] = \frac{r+1}{r+n+1}\Big[2MN + (n-N)\varepsilon\Big] \tag{9.1.6}$$

显然，可选择 n 充分大，使 (9.1.6) 右边小于 ε, 这就证明了 Cesaro 和的正则性. 普通的求和为零次 Cesaro 和，级数能 r 次 Cesaro 求和的必要条件为 $a_n = o(n^r)$.

3. Borel 求和法：已知级数 (9.1.1), 可构成幂级数 (9.1.2) 及另一关联幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \tag{9.1.7}$$

显然 (9.1.7) 的收敛半径比 (9.1.2) 大. 若级数 (9.1.2) 有非零的收敛半径， (9.1.7) 就代表整函数 $f(x)$. 作积分

$$B(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(tx) dt \tag{9.1.8}$$

我们称 $B(1)$ 为原级数 (9.1.1) 的 Borel 和 $S(B)$. 显然我们有

$$B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.1.9}$$

这只要估计余项即可证明这一点.

$$|R_N(x)| = \left|B(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-t}\left[f(tx) - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}(xt)^n\right] dt\right|$$

$$\leq M \int_0^{\infty} e^{-t} (xt)^{N+1} dt = O(x^{N+1})$$

所以，这是求渐近展开之逆演．在收敛圆内，(9.1.9) 因逐项积分定理可取等号，因此 Borel 和是正则的，但它将和的意义拓广到 (9.1.9) 右边不收敛的情况了．

此外，还有 Euler 求和法，Holder 求和法，不予赘述．下面，要用几个例子来说明如何应用上述这些新定义来求发散级数之和的．

[**例 9.1.1**]　$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

$$S(A) = \lim_{x\to 1-o}(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) = \lim_{x\to 1-o}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \quad (9.1.10)$$

由于

$$C_{2k}^{(1)} = \frac{k}{2k+1},\quad C_{2k+1}^{(1)} = \frac{k}{2k+2},$$

所以

$$S(C,1) = \lim_{n\to\infty} C_n^{(1)} = \frac{1}{2} \qquad (9.1.11)$$

再求 Borel 和．

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots = e^{-x}$$

$$S(B) = \int_0^\infty e^{-t}e^{-xt}dt|_{x=1} = \frac{1}{2} \qquad (9.1.12)$$

可见三个定义的和是一致的．

[**例 9.1.2**]　$S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ 这时，Abel 求和法失效．可用 Cesaro 求和法，至少要 2 次以上 Cesaro 和．

$$S_{2n-1}^{(2)} = S_{2n}^{(2)} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (9.1.13)$$

故

$$S(C,2) = \lim_{n\to\infty} C_{2n}^{(2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(2n+2)(2n+1)}{2}} = \frac{1}{4} \qquad (9.1.14)$$

$C^{(2)}_{2n-1}$ 之极限值也是 1/4. 同样地，可用 Borel 方法求和

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{3x^2}{2!} + \cdots = \frac{d}{dx}(xe^{-x}) \tag{9.1.15}$$

$$S(B) = \int_0^\infty e^{-t}\frac{d}{dt}(te^{-t})dt = \frac{1}{4} \tag{9.1.16}$$

[**例 9.1.3**]　$S = 0! - 1! + 2! - 3! + \cdots$ 这个级数只能用 Borel 方法求和.

$$S(B) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t}dt = 0.596347 \tag{9.1.17}$$

下面讨论 Euler-Maclaurin 公式及其在发散级数求和中的应用.

首先，我们简单的给出 Bernoulli 多项式及 Bernoulli 数的定义. 将母函数 $\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$ 进行 Taylor 展开可得

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\varphi_n(x) \tag{9.1.18}$$

显然，系数是 x 的多项式，我们称它为 Bernoulli 多项式. $x = 0$ 时，

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\varphi_n(0) \tag{9.1.19}$$

我们称 $\varphi_n(0)$ 为 Bernoulli 数，简写为 φ_n. 由于

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}\text{th}\frac{t}{2}$$

是偶函数，且

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}t^{2n} \tag{9.1.20}$$

比较 (9.1.19), (9.1.20) 可知，$\varphi_0 = 1$，$\varphi_1 = -\dfrac{1}{2}$，$\varphi_{2n+1} = 0$，$\varphi_{2n} = (-1)^{n+1}B_n$. Bernoulli 数的递推公式为

$$(\varphi + 1)^n - \varphi^n = 0 \qquad n = 2, 3, \cdots \tag{9.1.21}$$

再将 φ 的幂次改成下标即可. 依次可得 Bernoulli 数为

$$\varphi_2=\frac{1}{6}\ ,\quad \varphi_4=-\frac{1}{30}\ ,\quad \varphi_6=\frac{1}{42}\ ,\quad \varphi_8=-\frac{1}{30}\ ,\quad \varphi_{10}=\frac{5}{66}\ ,\cdots$$

Beronulli 多项式为

$$\varphi_n(x)=(\varphi+x)^n\ ,\qquad n=0,1,\cdots \tag{9.1.22}$$

同样将上式中 φ 的幂次改成下标即可. 一般地，我们有公式

$$\varphi_{2n}=2\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\ ,\qquad n>0 \tag{9.1.23}$$

它不仅可以计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}$, 而且可以估计 $n\to\infty$ 时， Bernoulli 数的量阶. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\sim O(1)$, 所以

$$\varphi_{2n}=O\left[\frac{2n!}{(2\pi)^{2n}}\right] \tag{9.1.24}$$

现在我们不予推导，直接给出下列 Euler-Maclaurin 公式.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+mh}F(x)dx\ &=h\left[\frac{F(a)}{2}+F(a+h)+\cdots\right.\\&\left.+F(a+(m-1)h)+\frac{F(a+mh)}{2}\right]\\&-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(a+mh)\right.\\&\left.-F^{(2k-1)}(a)\right]+R_n\end{aligned} \tag{9.1.25}$$

式中

$$R_n=\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)\sum_{n=o}^{m-1}F^{(2n)}(a+hs+ht)dt$$

$0<s<1$. 在上式中, 由于和式中的系数含 Bernoulli 数, 为 $O(2k!)$, 往往会导致级数发散. 但当 m 增加时, h 减小, 余项对 h 讲是高阶小量. 因此, 这是一个渐近级数. 即

$$\begin{aligned}\int_a^{a+mh} F(x)dx \sim h\Big[\frac{F(0)}{2}+F(a+h)+\cdots\\ +F(a+(m-1)h)+\frac{F(a+mh)}{2}\Big]\\ -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2k}h^{2k}}{(2k)!}\Big[F^{(2k-1)}(a+mh)\\ -F^{(2k-1)}(a)\Big] \qquad h\to 0\end{aligned} \tag{9.1.26}$$

这里亦有一个最佳截断问题, Euler-Maclaurin 公式 (9.1.26) 可应用于求和及积分, 举例如下:

[**例 9.1.4**] Stirling 公式的高阶近似. 令 $a=0$, $h=1$, $F=\ln(1+t)$ 代入公式 (9.1.26)

$$\begin{aligned}\int_0^m \ln(1+t)dt \sim \frac{1}{2}\ln 1+\ln 2+\cdots\\ +\ln m+\frac{1}{2}\ln(m+1)-\frac{\varphi_2}{1\cdot 2}\frac{1}{m+1}-\frac{\varphi_4}{3\cdot 4}\frac{1}{(m+1)^3}\\ -\frac{\varphi_6}{5\cdot 6}\frac{1}{(m+1)^5}-\frac{\varphi_8}{7\cdot 8}\frac{1}{(m+1)^7}+\cdots\end{aligned}$$

令 $m+1=M$

$$\begin{aligned}\ln M! \sim (M+\frac{1}{2})\ln M-M+C+\frac{\varphi_2}{1\cdot 2}\frac{1}{M}+\frac{\varphi_4}{3\cdot 4M^3}\\ +\frac{\varphi_6}{5\cdot 6M^5}+\frac{\varphi_8}{7\cdot 8M^7}+\cdots\end{aligned} \tag{9.1.27}$$

由第一章公式 (1.1.6) 知 $C=\frac{1}{2}\ln 2\pi$, 由 Bernoulli 数, 可得

$$\begin{aligned}\ln M! \sim (M+\frac{1}{2})\ln M-M+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{12M}\\ -\frac{1}{360M^3}+\frac{1}{1260M^5}-\frac{1}{1680M^7}+\cdots\end{aligned} \tag{9.1.28}$$

［例 9.1.5］ 计算 Riemann-Zeta 函数，其定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad \mathrm{Re}\, s>1 \tag{9.1.29}$$

⋮

$(e^u-1)^{-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-ku}$, 可得等式

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{u^{s-1}e^{-Nu}du}{e^u-1} \tag{9.1.30}$$

将 (9.1.20) 代入上式

$$\frac{u}{e^u-1}=1-\frac{1}{2}u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}u^{2n}}{(2n)!} \tag{9.1.31}$$

代入上式，逐项积分

$$\begin{aligned}\zeta(s)\ &=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(s-1)N^{s-1}}-\frac{1}{2N^s}\\&+\frac{\varphi_2 s}{2!N^{s+1}}-\frac{\varphi_4(s+2)(s+1)s}{4!N^{s+3}}\\&+\frac{\varphi_6(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)s}{6!N^{s+5}}\\&+\cdots\end{aligned} \tag{9.1.32}$$

由 (9.1.32) 便可进行近似计算．发散级数求和可以找到实际应用：

1. **Fejer定理**：若函数 $f(x)$ 处处连续成充其量有第一类不连续点，其 Fourier 级数必可在 Abel 或 Cesaro 广义和意义下求和，而且其值等于 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, 这是数学上的应用．

2. 由于实际问题的渐近级数因受奇点限制，所以在接近收敛半径时收敛缓慢，在收敛圆外级数发散，通过各种途径改进渐近级数也是一种发散级数的求和方法，可用于解决实际工程问题．

无论如何，改进级数是以分析级数奇异性为基础的，所以，下面我们先来讨论渐近级数的奇异性．

9.2 级数的分析

从复变函数论知道，复平面上的任一幂级数必有一收敛圆，在收敛圆内，级数收敛；在收敛圆外，级数发散；在收敛圆上级数可以是收敛的，也可以是发散的 (Titchmarsh 1952). 幂级数的收敛半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{9.2.1}$$

所以，最近的奇点必在收敛圆上，在正实轴，负实轴上或不在实轴上，实系数的幂级数其复奇点必在共轭地出现，由于级数的奇点分析是级数改进的基础与前提. 因此，我们先来讨论如何确定奇点的位置和性质. 这里介绍三种方法：

1. 由和函数的来分析

一般说来，和函数的性质与级数的奇异性并无确定的联系，如 $\ln\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n}$, 在 $z=1$ 处，级数收敛，和函数正则，在 $z=-1$ 处, 级数发散, 和函数奇异; 如 $\dfrac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, 在 $z=1$ 处，级数发散，但和函数正则；又如 $\int\limits_0^z \dfrac{1}{w}\ln\dfrac{1}{1-\omega}dw = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$, 在 $z=1$ 处级数收敛，和函数奇异，但在一定条件下，可以建立两者间关系

定理：若对全体 n, a_n 都是实数, 且 $s_n = a_0+a_1+a_3+\cdots+a_n \to \infty$, 则 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 处奇异.

Tauber 定理：若幂级数的系数 $a_n = o(\dfrac{1}{n})$, 且 $\lim\limits_{x\to 1} f(z) = \lim\limits_{x\to 1} a_n z^n = S$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Tauber 定理可以推广到沿 $z=1$ 邻域的任一正规途径 (即曲线可微) 趋于 1 的情况. 这项工作是由 Littlewood 完成的 (Titchmarsh 1952).

2. 由系数的符号来判断

定理：若对所有 n 都有 $a_n \geq 0$，其中 a_n 为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的系数，则 $z=1$ 为奇点.

定理：若对所有 n 都有 $a_{2n} \geq 0$，$a_{2n+1} \leq 0$ 或 $a_{2n} \leq 0$ $a_{2n+1} \geq 0$，其中 a_n 为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的系数，则 $z=-1$ 为奇点 (Tithchmrsh 1952).

3. Domb-Sykes 图外推法

上面，我们已经看到幂级数的系数与其奇异性的关系，实际上，收敛半径可由

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

来确定，但是这个极限过程或快或慢，以 $\left(n,\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)$ 为坐标轴往往不能看出极限值来． Domb, Sykes 机智地取 $\left(\dfrac{1}{n},\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right|\right)$ 为坐标，所得曲线极限易于进行外推，我们假定奇点由代数奇点或对数奇点构成，即

$$\begin{aligned} &f(z)\sim(R\pm z)^{\alpha} && (\alpha\neq 0,1,2,\cdots)\\ &f(z)\sim(R\pm z)^{\alpha}\ln(R\pm z) && (\alpha=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

这时，对第一种情况：

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\mp\frac{1}{R}\left(1-\frac{1+\alpha}{n}\right) \tag{9.2.3}$$

对第二种情况 $\alpha=0$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\mp\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{n}\right) \tag{9.2.4}$$

α 为正数时， n 充分大：

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\sim\frac{1}{R}\left(1-\frac{1+\alpha}{n}\right) \tag{9.2.5}$$

不管怎样，我们可以由 Domb-Sykes 图外推，与 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 轴的截距可确定收敛半径，在 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 轴上交点处曲线之斜率确定指数 α. 我们从图 9.2.1 可以看出，这种外推法是简单有效的.

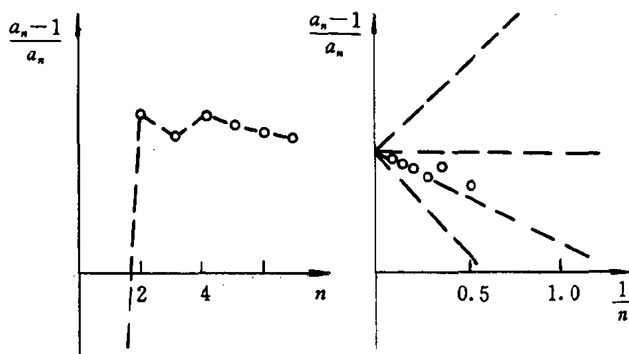


图 9.2.1　Domb-Sykes 曲线图外推法

从以上论述可以看到，方法二仅适用于单个实奇点的情况，方法三只能给出收敛半径 R 及指数 α, 不能给出复奇点位置，本书第一个作者解决了有复共轭奇点的符号判别法与 Domb-Sykes 外推问题，并讨论了有多对奇点情况的处理办法 (李家春 1982a).

现在来讨论只有一对复共轭奇点的情况，为了方便起见，不妨假定幂级数 (2.1) 的收敛的收敛半径为 1, 这时除了 $e^{\pm i\theta_0}$ 外，不存在其它有限的奇点，$F(\varepsilon)$ 便可表达为

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^{\alpha} + c.c. + G(\varepsilon) \qquad (9.2.6)$$

这里 $F(\varepsilon)$ 是幂级数 (2.1) 在复平面上的解析延拓. $\alpha < 0$, 即该奇点为 Van Dyke 讨论的第一类奇点，对于另两类奇点，可进行类似的讨论；$c.c.$ 表示第一项的复共轭部分；$G(\varepsilon)$ 是全平面上除 ∞ 外

的解析函数，如果 ∞ 处不是本性奇点，它是多项式，仅对前两项展开成幂级数后的有限项系数的影响．所以当 n 充分大时，我们只在考虑由前两项产生的系数就足够了，于是

$$\begin{aligned} f_n &= 2Re\left[(-1)^n\binom{\alpha}{n}|A|e^{(n\theta_0+\zeta_0)i}\right] \\ &= 2\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!}|A|\cos(\zeta_0+n\theta_0) \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

其中 $\zeta_0=\operatorname{Arg}A-\alpha\theta_0$. 因此，$f_n$ 的符号将由辐角为 $\zeta_0+n\theta_0$ 的矢径所处的象限来决定，一、四象限取正，二、三象限取负．我们假定幂级数系数的符号规律为

$$\underbrace{+++\cdots\cdots}_{N_0};\ \underbrace{----\cdots\cdots}_{N_1};\ \underbrace{+++\cdots\cdots}_{N_2};\ \cdots\cdots \tag{9.2.8}$$

显然可得

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\pi}{2}<\zeta_0+N_0\theta_0<\frac{\pi}{2} \\ &\frac{\pi}{2}<\zeta_0+(N_0+N_1)\theta_0<\frac{3\pi}{2} \\ &\cdots\cdots \\ &(k-\frac{1}{2})\pi<\zeta_0+(N_0+N_1+\cdots+N_k)\theta_0<(k+\frac{1}{2})\pi \end{aligned}\right\}$$

所以

$$\frac{(k-\frac{1}{2})\pi-\zeta_0}{\sum\limits_{i=0}^{k}N_k}<\theta_0<\frac{(k+\frac{1}{2})\pi-\zeta_0}{\sum\limits_{i=0}^{k}N_k}\quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{9.2.9}$$

由此导出，

$$\theta_0=\lim_{k\to\infty}\frac{k\pi}{\sum\limits_{i=0}^{k}N_i} \tag{9.2.10}$$

这样，我们便得到了如下的符号判别法：

定理 1. 摄动幂级数的系数符号为 N_0 个正号， N_1 个负号，……，那么它的奇点在 $\varepsilon_0 e^{\pm i\theta_0}$ 处，其中 θ_0 由 (9.2.10) 式确定.

由该定理可见， Van Dyke 原先的法则仅为我们的特例. 当 f_n 不变号时， $N_1=\infty$, $\theta_0=0$, 奇点在 ε_0 处；当 f_n 衔号正负相间时， $N_1=N_2=\cdots=1$,

$$\theta_0=\lim_{k\to\infty}\frac{k\pi}{k+1}=\pi$$

即奇点在 $-\varepsilon_0$ 处.

我们还可推断， N 个正负号相间时，奇点在 $\varepsilon_0 e^{\pm i\frac{\pi}{N}}$ 处.

下面，我们来考虑 Domb-Sykes 图外推法. 由具有复共轭奇点的幂级数系数表达式同具有实奇点的幂级系数表达式进行比较，可见两者仅相差一个 $2\cos(\zeta_0+n\theta_0)$ 的因子. 而奇点的性质主要是由不含该因子的系数来决定的，于是我们便可得到下述结论.

定理 2. 对于具有复共轭奇点的幂级数，若以 $1/n$ 为横坐标，以 $f_n\cos\left[(n-1)\theta_0+\zeta_0\right]/f_{n-1}\cos\left[n\theta_0+\zeta_0\right]$ 为纵坐标， Domb-Sykes 图外推法依然有效.

显然，当奇点在实轴上即 $\theta_0=0$, π 时，它又变成以 f_n/f_{n-1} 为纵坐标的情况了.

如果除了奇点 $e^{\pm i\theta_0}$ 外，还有其它奇点，我们分两种情形来讨论：

i) 在收敛圆上还有别的奇点. 为妨假定在 $e^{\pm i\theta_1}$ 处还有 $\alpha<\beta<0$. 这时，由幂级数解析延拓的函数 $F(\varepsilon)$ 可表达为

$$F(\varepsilon)=A(e^{-i\theta_0}-\varepsilon)^{\alpha}+c.c+B(e^{-i\theta_1}-\varepsilon)^{\beta}+c.c+G(\varepsilon)$$

由类似于上节的讨论，我们仅考虑第一、二项及第三、四项获得的系数就足够了. 比较它们系数 a_n 和 b_n 的量级，由 (9.2.7) 式可得

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right|\sim\left|\frac{A}{B}\right|\frac{\Gamma(-\alpha+n)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\beta+n)\Gamma(-\alpha)}$$

式中 Γ 为 Gamma 函数. 由 Stirling 公式可知，其渐近表达式为

$$\Gamma(n) \sim n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

所以

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \sim \left|\frac{A}{B}\right| \frac{\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha-\beta} n^{\beta-\alpha} \tag{9.2.11}$$

由此可见，当 $\alpha < \beta < 0$ 时，上述比值以 $n^{\beta-\alpha}$ 的量阶趋于无穷，故展开式的符号主要由强奇点来确定的. 此外，由于

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{a_n + b_n}{a_{n-1} + b_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \left[1 + O(\frac{1}{n^{\beta-\alpha}})\right] \tag{9.2.12}$$

因此， Domb-Sykes 图的特性也是主要由强奇点项来确定的.

对第二、三类奇点可进行类似的分析. 于是我们导出

定理 3. 对于在同一收敛圆上有若干对复共轭奇点的摄动级数，符号判别法和 Domb-Sykes 图示法所确定的是最强奇点的位置和性质.

ii) $F(\varepsilon)$ 在收敛圆外还有别的奇点. 假定在 $Re^{\pm i\theta_2}$ 处有 γ 阶奇点， $R > 1, \alpha < 0, \gamma < 0$, 这时

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha + c.c + C(Re^{-i\theta_2} - \varepsilon)^\gamma + c.c. + G(\varepsilon)$$

同样，比较第一、二项和第三、四项得到的系数，

$$\left|\frac{a_n}{c_n}\right| \sim \left|\frac{A}{C}\right| \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(-\alpha)} e^{\alpha-\gamma} n^{\gamma-\alpha} R^{n-\gamma}$$

由于因子 $R^{n-\gamma}$ 的存在，不管 α, γ 谁大谁小，上式总趋于 ∞, 所以是以收敛圆上的奇点为主.

对于收敛圆上是第二、三类的情况，结论相同. 如果收敛圆上是第二、三类奇点，收敛圆外是第一类奇点，这时

$$F(\varepsilon) = A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^\alpha \log(e^{-i\theta_0} - \varepsilon) + c.c. + C(Re^{-i\theta_2} - \varepsilon)^\gamma + c.c. + G(\varepsilon) \tag{9.2.13}$$

其中 α 为正整数， $\gamma<0$, 第一、二项的系数为 $O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ 量阶的. 于是由 Stirling 公式，可得

$$\left|\frac{a_n}{c_n}\right| \sim \left|\frac{A}{C}\right| \alpha! \Gamma(-\gamma) n^{-n+\gamma-\alpha-\frac{1}{2}} e^{-n\gamma} R^{n-\gamma}/\sqrt{2\pi} \tag{9.2.14}$$

这时，由于 n^{-n} 因子的存在，上式趋于零，所以起作用的是负幂次奇点. 所以，我们的结论是：

定理 4. 当收敛圆上、收敛圆外均有奇点时，如果它们是同类奇点，那么奇点首先确定收敛圆上的奇点位置和性质；如果它们是不同类的奇点，那么奇性判别法首先确定负次幂奇点的位置和性质 (注意，第二、三类奇点系数的量阶有统一的表达式 $O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$, 故可看作为同类奇点.).

确定了第一个奇点的位置和性质后，为了确定别的奇点性质和位置，我们可以构造一个新函数

$$H(\varepsilon) = F(\varepsilon) - A(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^{\alpha} - c.c \tag{9.2.15}$$

其中 A 由下式确定：

$$A = \lim_{\varepsilon \to e^{-i\theta_0}} F(\varepsilon)(e^{-i\theta_0} - \varepsilon)^{-\alpha} \tag{9.2.16}$$

这样，可再次使用摄动级数的奇性判别法来研究函数 $H(\varepsilon)$, 便可了解 $F(\varepsilon)$ 其它奇点的位置和性质.

[**例 9.2.1**]　圆柱非定常运动高阶边界层解.

在研究脉冲型或指数型加速运动的圆柱绕流时，对 Reynolds 数与时间进行双重幂级数展开，采用匹配法可以获得三阶边界层解. 在各阶近似的位移厚度和摩阻级数有交错的符号型，周期为 14, 即 $\cdots++\cdots++\cdots+++$(仅在起始位置略有差异), 应用以上定理可断言该摄动级数的最近奇点位于 $\theta=\frac{3}{7}\pi$ 处. 用下一节介绍的 Pade 近似发现，一阶近似奇点辐角为 $\pm 2.98\pi/7$, 与理论预测一致，二阶近似奇点辐角为 $\pm 3.00\pi/7$, 所以两种方法得到相同的结果. 图 9.2.2

给出了〔24/25〕Pade 近似的极点位置，说明用以上定理确定最近奇点的位置是正确的 (Nam 1990).

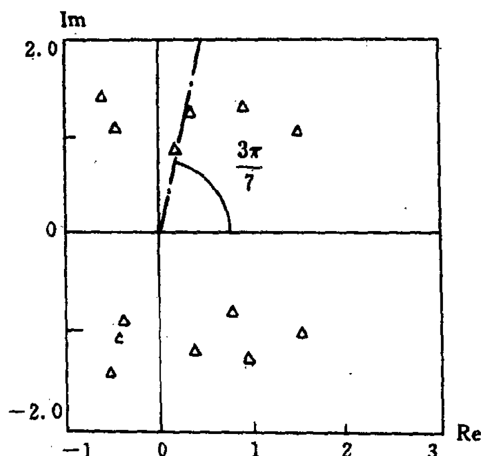


图 9.2.2 突然起动圆柱振动级数 Pade 近似的极点

9.3 级数收敛性的改进

在实际问题中，我们经常会遇到缓慢收敛的延伸级数．为了达到一定精确度，要计算很多项，工作量颇大．采取适当措施后，可以有效地改进它的收敛性，迅速得到准确的结果．下面介绍几种极为有用的方法：

1．Cummer 变换，对于正项级数

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9.3.1}$$

有一辅助级数

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{9.3.2}$$

存在，它的和是已知的，而且满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=R \tag{9.3.3}$$

那么， Cummer 变换

$$A=\frac{B}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{b_n}{Ra_n})a_n \tag{9.3.4}$$

可加速原级数的收敛性．因为因子

$$\varepsilon_n=(1-\frac{b_n}{Ra_n})$$

显而易见是趋于零的．

[**例 9.3.1**] 试改进级数

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots \tag{9.3.5}$$

的收敛性．由于

$$\frac{1}{N+1}=\int_{N+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}<\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\int_{N}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{N}$$

(这只须把曲线 $\frac{1}{x^2}$ 下的面积同它的内外接矩形面积和相比较即可)．要准确到 10^{-4}, 必须计算 10^4 项．

现有辅助级数

$$B^{(1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots=1 \tag{9.3.6}$$

满足条件 (9.3.3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$$

用 Cummer 变换得

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{n^2}{n(n+1)}\right]\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n^2} \tag{9.3.7}$$

再以

$$B^{(2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = \frac{1}{4} \tag{9.3.8}$$

为辅助级数，经 Cummer 变换得

$$S = \frac{5}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} \tag{9.3.9}$$

因为

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

所以

$$\frac{1}{3N(N+1)(N+2)} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{3(N-1)N(N+1)}$$

取 $N = 13$, 余项介于 0.00012 与 0.00015 之间，因此

$$S \approx \frac{5}{4} + 2\sum_{n=1}^{12} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} \tag{9.3.10}$$

可准确到 10^{-4}.

2. Shanks 变换．对于序列 $\{A_n\}$, 可作变换

$$S(A_n) = \frac{\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_n \\ \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Delta A_{n-1} & \Delta A_n \end{vmatrix}} = \frac{A_{n+1}A_{n-1} - A_n^2}{A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n} \tag{9.3.11}$$

式中，$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$. 由此可见，这是非线性带权平均求和，因此，它可以使发散级数收敛，由 (9.3.11) 立即可得例 9.1.1, 例 9.1.2 的广义和分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. 它对于近几何级数，可以改进收敛性.

[例 9.3.2]　对于调和级数

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots \tag{9.3.12}$$

我们可对它的部分和 S_n 作 Shanks 变换.

表 9.3.1　调和级数的 Shanks 变换

n	S_n	$S(s_n)$	$S^2(s_n)$	$S^3(s_n)$	$S^4(s_n)$
1	4.0000000				
2	2.6666667	3.1666667			
3	3.4666667	3.1333333	3.1421053		
4	2.8952381	3.1452381	3.1414502	3.1415993	
5	3.3396825	3.1396825	3.1416433	3.1415909	3.1415926
6	2.9760462	3.1427129	3.1415713	3.1415933	3.1415927
7	3.2837385	3.1408814	3.1416029	3.1415925	
8	3.0170718	3.1420718	3.1415873		
9	3.2523659	3.1412584			
10	3.0418396				

从表上可见，调和级数，我们只要十项就可以计算准确到 10^{-7} 的 π 值 (Shanks 1955, Aziz 1984 , 李家春 1981).

3. Richardson 外推，对于某些序列， Shanks 变换效果不好，对形如

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sim Q_0 + Q_1 n^{-1} + Q_2 n^{-2} + \cdots \tag{9.3.13}$$

的级数，可用 Richardson 外推法，求出其和 Q.

我们在第 N 项截断

$$S_n = Q_0 + Q_1 n^{-1} + \cdots + Q_N n^{-N}$$

$$S_{n+1} = Q_0 + Q_1 (n+1)^{-1} + \cdots + Q_N (n+1)^{-N}$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_{n+N} = Q_0 + Q_1 (n+N)^{-1} + \cdots + Q_N (n+N)^{-N}$$

由 Vandermonde 行列式性质可得

$$Q_0=\sum_{k=0}^{N}\frac{S_{n+k}(n+k)^N(-1)^{k+N}}{(N-k)!k!} \tag{9.3.14}$$

随 N,n 增加，Q_0 不断接近于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 可以用此方法计算 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, Stirling 公式等等 (Bender et al. 1978).

4. 奇性析出法与级数补全法

如果我们已经正确判断了幂级数的奇异性，便可用各种运算消除，析出奇性因子，从而使级数收敛性获得改善，这里我们仅用例子来说明 (Aziz 1984, 李家春 1981, Van Dyke 1974)

[**例 9.3.3**]　Howarth 级数. 外流为 $(1-\frac{1}{8}x)$ 的层流边界层摩阻为:

$$\begin{aligned}C_f=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(&1.328242-1.02054x\\&-0.06926x^2-0.0560x^3-0.0372x^4-0.0272x^5\\&-0.0212x^6-0.0174x^7-0.0147x^8-\cdots)\end{aligned} \tag{9.3.15}$$

括号中级数在 0.96 处有 1/2 阶奇性，可将上述级数平方

$$\begin{aligned}C_f^2=\frac{1}{16}x^{-1}(&1.764227-2.711052x+0.857512x^2\\&-0.0074x^3+0.0203x^4+0.0114x^5+0.0075x^6\\&+0.0050x^7+0.0038x^8+\cdots)\end{aligned} \tag{9.3.16}$$

新级数奇点仍在正实轴上，且 $\alpha=5/4$, 因此原级数次要奇性为 3/4 阶的，或者可将奇性析出

$$\begin{aligned}C_f=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(0.96-x)^{\frac{1}{2}}(&1.355631-0.33553x\\&-0.06157x^2-0.0390x^3-0.0280x^4-0.0219x^5\\&-0.0182x^6-0.0158x^7-0.0140x^8-\cdots)\end{aligned} \tag{9.3.17}$$

括号中级数在 0.96 处有 1/4 阶奇性，故可进一步化为

$$C_f = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(0.96-x)^{\frac{1}{2}}\Big[0.8643+(0.96-x)^{\frac{1}{4}}(0.495$$

$$+0.129x+0.0737x^2+0.0629x^3+\cdots)\Big] \qquad (9.3.18)$$

这时计算 $x=0.94$ 处的值比原级数要精确 5 倍.

由于我们已知上述级数的行为，可以将有限项延伸至无穷，其最后一项应与 $(x-0.96)^{1/4}$ 的同次幂项有相同的系数. 这样一来，我们可得

$$C_f = \frac{1}{4}x^{-1/2}(0.96-x)^{1/2}[0.660(0.96-x)^{1/4}$$

$$+0.702332-0.165154x+0.00489x^2+0.0014x^3$$

$$+0.0009x^4+0.0007x^5+0.0004x^6+0.0001x^7] \quad (9.3.19)$$

它在 $x=0.94$ 时取 0.0292, 同测量值 0.0289 误差仅 1%, 比上述所有方法更为精确.

9.4 级数解的解析延拓

要进行解析延拓，往往需要判别级数的奇异点位置与性质. 可以根据级数的符号或 Domb-Sykes 图外推法确定，请参看文献 (李家春 1981).

1. Euler 变换. 对于奇点在负实轴上，可采用此方法，不妨假定奇点在 $z=-1$ 处. 作 Euler 变换 $\zeta=\dfrac{z}{z+1}$, 在此变换下原级数之系数 a_n 变为:

$$d_0=a_0, \quad d_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}a_i \qquad (9.4.1)$$

在上述变换下，原先因 $z=-1$ 处有奇点，使级数在正轴 $(1,\infty)$ 发散. 现在将该段直线映照到 $(\frac{1}{2},1)$ 上. 若原来的函数在 $z=-\frac{1}{2}$ 右

半平面没有奇点，新级数将在单位圆内收敛．这样，原级数便可将适用范围扩大到 $(1,\infty)$ 区间上去了．

2. Pade 有理逼近 (Baker 1956)．这就是说，用有理分式

$$R_{n,m}=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \tag{9.4.2}$$

来逼近幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k \tag{9.4.3}$$

式中 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ 分别为 m 次，n 次多项式 $\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$，$\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$，并要求

$$Q_n(x)f(x)-P_m(x)=O(x^{n+m+1}) \tag{9.4.4}$$

比较同次幂系数得

$$\begin{aligned}
a_0&=C_0b_0\\
a_1&=C_1b_0+C_0b_1\\
&\cdots\cdots\\
a_m&=C_mb_0+\cdots+C_0b_m
\end{aligned} \tag{9.4.5}$$

以及

$$\begin{cases}
C_{m+1}b_0+C_mb_1+\cdots+C_{m-n+1}b_n=0\\
\cdots\cdots\\
C_{m+n}b_0+C_{m+n-1}b_1+\cdots+C_mb_n=0
\end{cases} \tag{9.4.6}$$

我们先由 (9.4.6) 确定 b_0，b_1，$\cdots$，b_n，再由 (9.4.5) 求出 a_0，a_1，$\cdots$，a_m．这里可以看到，(9.4.6) 中可以精确到一个常数因子，但对结果并不影响．

若将获得的 Pade 逼近 $R_{m,n}(x)$ 排成一矩阵，我们称它为 Pade 表 (9.4.7)．在一定条件下，它将收敛于原来的函数 $f(x)$，所以，我

们可用它来逼近原函数 (Graves-Morris 1973, 李家春 1981).

$$\begin{pmatrix} R_{0,0}, & R_{0,1}, & R_{0,2}, & \cdots, & R_{0,N} \\ R_{1,0}, & R_{1,1}, & R_{1,2}, & \cdots, & R_{1,N} \\ R_{N,0}, & R_{N,1}, & R_{N,2}, & \cdots, & R_{n,N} \end{pmatrix} \tag{9.4.7}$$

由于按 (9.4.5), (9.4.6) 计算, 每次要求解两组线性代数方程式, 很不方便. 我们可用连分式的方法来递推. 对于连分式近似:

$$F_N(x) = \cfrac{C_0}{1+\cfrac{C_1x}{1+\cfrac{C_2x}{1+\cdots}}}$$

$$\cdots + \frac{C_{N-1}x}{1+C_Nx} \tag{9.4.8}$$

上述连分式是 Pade 近似 $R_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}$ 或 $R_{\frac{N+1}{2},\frac{N-1}{2}}$, 前者 N 为偶数, 后者 N 为奇数, 而且要求它同幂级数 $f(x)$ 的前 $N+1$ 项相同. 根据 Pade 近似的唯一性, 这个连分式刚好构成 Pade 序列 $R_{0,0}$; $R_{1,0}$;$R_{1,1}$;$R_{2,1}$;$\cdots$ 现在先用递推方法计算连分式的系数 C_N. 设

$$N_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(i)} x^n \tag{9.4.9}$$

$$D_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(i)} x^n \tag{9.4.10}$$

式中令 $A_n^{(o)} = a_n, B_0^{(o)} = 1, B_n^{(o)} = 0 (n > 1)$, 那么由下述公式

$$A_n^{(i+1)} = B_{n+1}^{(i)} - \frac{A_{n+1}^{(i)}}{A_0^{(i)}} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{9.4.11}$$

$$B_n^{(i+1)} = \frac{A_n^{(i)}}{A_0^{(i)}} \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{9.4.12}$$

可以求出 C_i:

$$C_i = A_0^{(i)} \tag{9.4.13}$$

若

$$F_N(x) = \frac{R_N(x)}{S_N(x)} \tag{9.4.14}$$

那么， $F_{N+1}(x)$ 的分子. 分母为

$$R_{N+1}(x) = R_N(x) + C_{N+1}xR_{N-1}(x) \tag{9.4.15}$$

$$S_{N+1}(x) = S_N(x) + C_{N+1}xS_{N-1}(x) \tag{9.4.16}$$

这里假设 $R_{-1}(x) = 0, S_{-1}(x) = 1$, $R_0(x) = C_0$ $S_0(x) = 1$, 从连分式方法可以容易地逐步得到 Pade 序列. (Bender et al. 1978)

[例 9.4.1] 求级数

$$f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \tag{9.4.17}$$

的 Pade 序列. 由递推公式 (9.4.11), (9.4.12) 得

表 9.4.1 Pade 近似系数递推表

$A_n^{(0)}$	1	-2	3	-4	5
$B_n^{(0)}$	1	0	0	0	0
$A_n^{(1)}$	2	-3	4	-5	
$B_n^{(1)}$	1	-2	3	-4	5
$A_n^{(2)}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$		
$B_n^{(2)}$	1	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	
$A_n^{(3)}$	$\frac{1}{2}$	-1			
$B_n^{(3)}$	1	-2	3		
$A_n^{(4)}$	0				
$B_n^{(4)}$	1	-2			

(9.4.18)

所以, C_i 的序列为 $1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \cdots$. 再由分式 (9.4.15) (9.4.16) 得 Pade 序列为

$$1, \frac{1}{1+2x}, \frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{3}{2}x}, \frac{1}{1+2x+x^2}, \cdots \tag{9.4.19}$$

若取 $x=1$, 我们得本章 [例 9.1.2] 的结果

$$\frac{1}{4}=1-2+3-4+5-\cdots \tag{9.4.20}$$

从中，我们可以看到，上述结果不仅可以在 x 接近于 1 时加速收敛性，也可将级数解延拓到更大范围中去，这就是 Pade 近似的作用.

3. 微分近似

这种方法是递推关系法与 Pade 近似的自然推广，是迄今为止最有效的分析级数的方法，其一般形式为

$$\sum_{i=0}^{k} Q_i(z)D^i f(z)=P(z) \tag{9.4.21}$$

其中 $Q_i(z)$, $P(z)$ 分别为 N_i,N_0 阶多项式，D 为微分算子 $z\frac{d}{dz}$. 显然，函数对数微商的 Pade 近似为

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{9.4.22}$$

递推关系还可用寻找母函数所满足的 (9.4.21) 形式的微分方程求解，所以它们都是微分近似的特例.

在式 (9.4.21) 中的非齐次项出现，往往可以用来消除高阶奇性，使得齐次方程的解有较低阶的奇异性. 在微分近似中可以由已知的 $f(z)$ 的展开式，获得 $Q_i(z)$ 的表达式. 这样运用第四章微分方程的奇点分析方法，可以了解 $f(z)$ 奇性行为，这些奇点是 $Q_k(z)$ 的极点，零点和无穷. 在求系数时，依靠计算机往往是十分必要的，我们提倡理论分析与计算的结合. 有关细节读者可参看 (Guttmann 1989)

习　　题

9.1 试用任一种方法求下述发散级数的和

(1) $1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+\cdots$

(2) $0!+2!+0!+4!+0!+6!+\cdots$

9.2 试用 Euler-Maclaurin 公式求下述级数，积分的值，并估计误差：

(1) $\zeta(2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

(2) $I=\int\limits_{1}^{10}\frac{dx}{x^2}$

9.3 试用 Cummer 变换，求

(1) $S=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$

(2) $S=1+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{3^2.4}+\frac{1}{4^2.5}+\cdots$

9.4 已知

$$\sigma_0(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & 0<x<\pi\end{cases}$$

$$\sigma_2(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\begin{cases}\frac{-3\pi x^2-2\pi^2x-x^3}{12} & -\pi<x<0\\ \frac{3\pi x^2-2\pi^2x-x^3}{12} & 0<x<\pi\end{cases}$$

分别在原点有间断，二阶导数有间断，请改进 Foureir 级数的收敛性

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx\qquad(0<x<\pi)$$

9.5 已知外流为 $(1-\frac{1}{8}x)$ 层流边界层的摩阻系数为 Howarth 级数

$$C_f=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1.328242-1.02054x-0.06926x^2-0.0560x^3$$
$$-0.0372x^4-0.0272x^5-0.0212x^6-0.0174x^7-0.0147x^8)$$

采用多种方法确定奇点位置和性质，并加以改进.

9.6 请用 Richardson 外推法， Shanks 变换， Maclaurin 公式求

(1) $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

(2) $\Gamma(10001)$

9.7 试导出 $x^2+x-\varepsilon=0$ 正根的前 11 项级数，并绘制 Domb-Sykes 图外推其奇位置和性质，并改进级数性质.

9.8 试导出 Euler 变换前后级数系数间的关系，变换后的收敛范围.

9.9 已知级数

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= 1.0-0.5\varepsilon+0.833333\varepsilon^2-1.905555\varepsilon^3+5.043055\varepsilon^4\\
&\quad +14.51429\varepsilon^5+44.158916\varepsilon^6-140.2361\varepsilon^7+457.87086\varepsilon^8\\
&\quad -1526.744970\varepsilon^9+5175.665448\varepsilon^{10}+o(\varepsilon^{11})
\end{aligned}
$$

请分析奇点位置性质，用 Euler 变换改进其收敛性.

9.10 将下述之级数

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= 1.3282+0.6943\varepsilon-0.1641\varepsilon^2+0.1016\varepsilon^3-0.07595\varepsilon^4\\
&\quad +0.06129\varepsilon^5-0.05115\varepsilon^6+0.04321\varepsilon^7-0.03647\varepsilon^8
\end{aligned}
$$

截断至 5 项，求 Pade 近似 $R(2,2)$.

第十章 级数分析在流动问题中的应用

前面已经指出,级数的收敛性受到了参数复平面上奇点的限制.应当区分两种不同类型的奇点. 如果奇点发生在正实轴上, 这种奇点往往是物理原因引起的. 当参数接近该值时, 会有新的物理现象发生, 这种奇点叫物理奇点. 如: Mach 数超过 1 时会产生激波, 流场中便会有间断; 又如: 当水波的陡度超过 1/7 时, 会发生破碎等等. 这种物理奇点一般是不可逾越的, 虽可设法改进摄动级数的收敛速度, 但不能延拓到奇点以外的范围中去; 如果奇点发生在负实轴或实轴以外, 那么, 这种奇点是非物理的, 可以通过数学上的处理将摄动解延拓出去, 从而扩大了摄动方法的适用范围. 也就是说, 可以不限于小参数的范围. 显然, 这是一件很有意义的事情.

改进级数往往是以摄动级数的渐近行为为基础的, 为了解决摄动级数收敛缓慢, 甚至发散, 摄动解的应用范围受到限制的问题, 我们必须进行两方面的工作, 一是要尽可能地将级数延伸到足够多的项, 计算代数软件为我们提供了运算的工具; 另一方面, 单纯地延伸级数往往不能奏效, 必须进行级数的分析, 级数改进的方法为我们提供了理论工具, 所以, 上一章的方法就有了用武之地.

在本章, 我们要用流体力学中的具体例子来说明级数分析理论的重要意义. 首先介绍级数分析的步骤, 并以 Stokes 波与非均匀流的相互作用说明延伸摄动级数到很高阶项的方法与现有的计算代数软件的使用. 然后, 研究绕平板和圆球的粘性阻力系数和加速壁面槽道中的流动, 用实例说明级数分析在流动问题中的应用, 前者是奇点在负实轴上的例子, 后者是奇点在实轴外的例子.

10.1 波与流的非线性相互作用

上面的章节已经说明了进行摄动分析的主要步骤:

(1) 适当选择小参数，归纳实际摄动问题的正确数学表述；

(2) 用各种数学方法和工具尽可能地延伸级数；

(3) 用上一章的数学理论，分析延伸的摄动级数的奇点和性质；

(4) 改进级数，加速收敛性和扩大其适用的参数范围；

(5) 计算重要物理量，同现有研究结果比较，阐释物理现象.

在本节，我们要以波流的非线性相互作用为实例，说明摄动级数的延伸问题. 在第二点中已提到要采用各种方法和工具指的是手工推导和依靠计算代数软件.

对于手工推导，一种办法是求递推公式，包括各阶方程，边界条件和解，如果顺利，问题就迎刃而解. 否则，我们要首先推导头两三项，从中找到规律. 这样便可假定解的具体形式，包含一些待定的系数，于是问题就简化得多了. 要是根本没有规律，就只好靠计算机了. 应当指出，如果所求的项数增加，即便是有规律可循，时间，精力也不允许，而且不可避免会出错. 所以，从事摄动计算的人要学会计算代数，强调理论与计算的结合.

至于计算代数软件，现有多种，如: Macsyma, Maple, Reduce, Mathematica 等，功能大同小异. 要熟悉其中的一、二种. 它们同现有的语言有根本的不同，即其运算对象是代数表达式，而不是具体的数. 最新版本的软件有很强的功能，包括四则、乘方、开方、微分、积分、分式、多项式，初等函数的各种运算，只要充分利用就完全可以代替研究人员的艰苦劳动. 注意，这时你最好也要用手工推导两三项以作校验. 先得到各阶方程，边界条件的结果，然后可以猜测解的形式或用 Runge-Kutta 方法直接积分. 软件还可将得到的代数表达式化成 Fortran 或 C 语言的表达形式，直接纳入程序进行数值计算.

在本节，我们要给出可以得到某些规律的问题的例子. 下一节的例子则要用 Runge-Kutta 法求解. 不过到高阶时，由于还应用了渐近分析，可以减少很多工作量，值得借鉴.

现在我们来讨论 Stokes 波与流的相互作用问题. 对于非线性

波，最大的困难是确定未知的自由面．变数变换往往可以将自由边界问题转化为固定边界问题 (李家春 1993)．对于水波，我们可采用 Dubrei- Jacordin 变换，即在流函数 ψ 表述的问题中，交换自变量 y 与因变量 ψ 的位置，便可导出关于 $y=y(x,\psi)$ 方程与边界条件如下：

$$y_\psi^2 y_{xx} - 2y_x y_{psi} y_x + (1+y_x^2) y_{\psi\psi} = 0 \tag{10.1.1}$$

$$(1+y_x^2) y_\psi^{-2} + 2\delta y = c, \quad (\psi = 0) \tag{10.1.2}$$

其中 $\delta=(c^2k/g)^{-1}$ 为无量纲相速度平方的倒数，k 为波数，g 为重力加速度．这时，由于边界已固定在 $\psi=0$, 所以只需要用 Bernoulli 积分为动力学条件即可．容易将上述方法推广到考虑表面张力的情况．这时，边界条件应改为：

$$(1+y_x^2) y_\psi^{-2} + 2\delta y - 2\delta\kappa(1+y_x^2)^{-3/2} = c, \quad (\psi = 0) \tag{10.1.3}$$

其中，$\kappa = Tk^2/\rho g$, T 为表面张力系数，ρ 为密度．对于上述两种情况，我们可以假定解有如下形式：

$$y = \psi + \sum_{l=1}^{\infty} \epsilon^l y^{(l)}(x,\psi) \tag{10.1.4}$$

$$y^{(l)} = \sum_{m=1}^{l} e^{m\psi} \sum_{n=0}^{m} A_{m,n}^{(l)} \cos nx \tag{10.1.5}$$

显然, 上述解已满足底部边界条件, 只需适当地选择系数 $A_{m,n}^{(l)}, (m\neq n)$ 和 $A_{n,n}^{(l)}$, 使得它满足方程和边界条件即可. 将以上各式代入 (10.1.3) 和 (10.1.2), 由于包含大量三角函数的非线性项，需和差化积化为谐波形式，才能比较同类项，就可以得到一系列递推公式．我们依靠计算代数软件，获得了 Stokes 波的 24 项解，毛细重力波的 8 项解 (宋涛，李家春 1988a,b)，他们分别与已有的 Stokes 波的五阶解，十一阶解 (Fenton 1985,Hui 1982) 和毛细重力波的五阶解 (Hogan 1980,1981) 一致．

因上述方法采用了流函数表述，显然它可应用于有旋流动，方程变成

$$y_\psi^2 y_{xx} - 2y_x y_{psi} y_x + (1 + y_x^2) y_{\psi\psi} = \Omega(\psi) y_\psi^3 \tag{10.1.6}$$

边界条件保持不变. 本书作者作了成功的应用，波与指数分布的非均匀流的相互作用就是一例 (Li and Chwang 1994). 在弱非线性波与弱剪切的假定下，除了波幅 ϵ 外，还可引进一个表示剪切强度的小参数 η. 其解的形式可表达为

$$y(x,\psi) = \psi + y_w(x,\psi) + y_c(x,\psi) + y_n(x,\psi) \tag{10.1.7}$$

其中， y_w, y_c 为纯波，纯流产生的流函数，它们分别是 ϵ 和 η 的幂级数. y_w 已如上所述， y_c 可由下述方程求解:

$$y_{c\psi\psi} = \Omega(\psi) y_{c\psi}^3 \tag{10.1.8}$$

得到

$$y_c(\psi) = \psi + \eta e^\psi + \frac{3}{4}\eta^2 e^{2\psi} + \frac{5}{6}\eta^3 e^{3\psi} + \frac{35}{32}\eta^4 e^{4\psi} + \frac{63}{40}\eta^5 e^{5\psi} \tag{10.1.9}$$

此外， y_n 为非线性相互作用项 ϵ, η 的双重幂级数:

$$y_n(x,\psi) = \sum_{i,j=1}^{i+j\le 5} y_n^{(i,j)}(x,\psi)\epsilon^i \eta^j \tag{10.1.10}$$

式中 $y_n(x,\psi)$ 是 $\cos mx$ 和 $\exp(n\psi)$ 乘积的线性组合，这些系数由方程和边界条件加以确定. 结果为

$$y_n^{(i,j)}(x,\psi) = SN^{(i,j)}E \tag{10.1.11}$$

其中，

$$S = \begin{cases} (\cos x \quad \cos 3x \quad \cos 5x), & i\text{为奇数} \\ (1 \quad \cos 2x \quad \cos 4x), & i\text{为偶数} \end{cases} \tag{10.1.12}$$

$$E = (e^\psi, e^{2\psi}, e^{3\psi}, e^{4\psi}, e^{5\psi})^T \tag{10.1.13}$$

式中，上标 T 表示转置以及 $N^{(i,j)}$ 为 5×5 的系数矩阵 (Li and Chwang 1994).

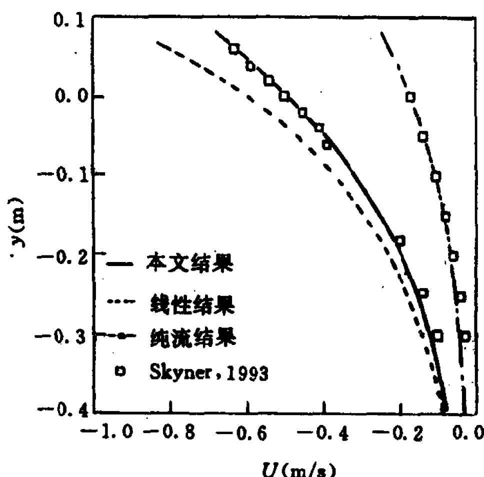


图 10.1.1　波流相互作用的波流场理论与实验比较

由此得到的色散关系:

$$\frac{C}{C_0}=1+\frac{2}{3}\eta+\frac{1}{2}\epsilon^2+\frac{8}{9}\eta^2+\frac{38}{15}\epsilon^2\eta+\frac{37}{27}\eta^3+\frac{1}{2}\epsilon^4+\frac{8153}{1350}\eta^2\epsilon^2$$
$$+\frac{61}{27}\eta^4+\frac{19}{5}\epsilon^4\eta+\frac{603}{50}\epsilon^2\eta^3+\frac{874}{243}\eta^5 \qquad (10.1.14)$$

同时，我们可以按下式计算流场，$u=(y_\psi)^{-1}, v=y_x/y_\psi$，并从 (x,ψ) 坐标系转换 (x,y) 坐标系，再同实验结果比较，验证了本理论的正确性. 尤其是，这个理论已将相互作用项分离出来，可以评估现有的工程方法，发现单纯使用线性叠加的方法计算流场，在波幅较大，剪切较强时并不正确，可以有 20% 的误差，并导致载荷的 40% 的误差，由此可见，在工程设计中，考虑波流相互作用是十分必要的 (王涛，李家春 1997).

10.2　平板与圆球粘性阻力系数的改进

虽然，边界层理论可以相当精确地计算大 Reynolds 数时的流

动，但当 Reynolds 数降低时 (比如：在高空或前缘附近)，其结果需要修正．所以，要发展高阶边界层理论．郭永怀 (1953) 研究了中等 Reynolds 数下的平板边界层流动，所得阻力系数得到很大改进．显然，流函数形式的边界层方程为

$$\psi_y\psi_{xy}-\psi_x\psi_{yy}-\psi_{yyy}=-p_x+R^{-1}\psi_{yxx} \tag{10.2.1}$$

$$p_y+R^{-1}(\psi_x\psi_{xy}-\psi_y\psi_{xx}+\psi_{xyy})=-R^{-2}\psi_{xxx} \tag{10.2.2}$$

其中，速度分量 $u=\psi_y, v=-\psi_x$. 若将流函数 ψ 和压力 p 展开成 $\epsilon=R^{-1/2}$ 的摄动级数

$$\psi=\psi^{(0)}+\epsilon\psi^{(1)}+\epsilon^2\psi^{(2)}+\dots \tag{10.2.3}$$

$$p=p^{(0)}+\epsilon p^{(1)}+\epsilon^2p^{(2)}+\dots \tag{10.2.4}$$

于是，各阶摄动方程为

$$\psi_y^{(0)}\psi_{xy}^{(0)}-\psi_x^{(0)}\psi_{yy}^{(0)}=\psi_{yyy}^{(0)} \tag{10.2.5}$$

$$\psi_y^{(0)}\psi_{xy}^{(1)}+\psi_{xy}^{(0)}\psi_y^{(1)}-\psi_x^{(0)}\psi_{yy}^{(1)}-\psi_{yy}^{(0)}\psi_x^{(1)}=U_1'(x)+\psi_{yyy}^{(1)} \tag{10.2.6}$$

边界条件为

$$\psi^{(n)}=\psi_y^{(n)}=0,\quad \text{当 } y=0 \tag{10.2.7}$$

$$\psi_y^{(n)}=U_n(x),\quad \text{当 } y=\infty \tag{10.2.8}$$

对于有限平板，根据 Fage 的实验和 Goldstein 的分析，尾缘后的边界层流线几乎是水平的，可见在各个区的位移速度为

$$V=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0\\ \dfrac{1}{2}\beta\epsilon x^{-1/2}, & \text{当 } 0\le x\le 1\\ 0, & \text{当 } x>1\end{cases} \tag{10.2.9}$$

由此可以导出势流的一阶复速度为

$$\begin{aligned} U^{(1)} - iV^{(1)} &= \frac{\beta}{2\pi}\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}(z-t)} \\ &= -\frac{i\beta}{2\sqrt{\pi}} + \frac{\beta}{2\pi\sqrt{z}} ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} \end{aligned} \tag{10.2.10}$$

令 $y=0$, 并取实部便可得到一阶速度或压力梯度，代入一阶流函数的方程：

$$\psi_y^{(0)}\psi_{xy}^{(1)} + \psi_{xy}^{(0)}\psi_y^{(1)} - \psi_x^{(0)}\psi_{yy}^{(1)} - \psi_{yy}^{(0)}\psi_x^{(1)} - \psi_{yyy}^{(1)}$$

$$= (\beta/\pi)[1/3 + 2x/5 + \ldots + (n-1)x^{n-2}/(2n-1) + \ldots \tag{10.2.11}$$

其中， $\psi^{(0)} = x^{1/2}f_0(\eta), \eta = y/\sqrt{x}, f^{(0)}$ 满足 Blasuis 方程，要求 $\psi^{(1)}$ 具有如下的形式解：

$$\psi^{(1)} = \frac{\beta}{\pi}[x^{1/2}f_1(\eta) + 1/3x^{3/2}f_2(\eta) + \ldots + \frac{x^{n-1/2}}{2n-1}f_n(\eta) + \ldots] \tag{10.2.12}$$

经简单推导，可得各阶 $f_n(\eta)$ 所满足的方程及边界条件：

$$2f_n''' + f_0f_n'' - 2(n-1)f_0'f_n' + (2n-1)f_0''f_n = -2(n-1) \tag{10.2.13}$$

$$f_n(0) = f_n'(0) = 0, f_n'(\infty) = 1 \tag{10.2.14}$$

在上述方程求解以后，可得阻力公式为

$$\tau = \rho U_\infty^2 \epsilon[x^{-1/2}f_0''(0) + \frac{\beta\epsilon}{\pi}\sum_1^\infty \frac{x^{n-1-1/2}}{2n-1}f_n''(0) + \ldots]$$

$$C_f = 4\alpha/\sqrt{R} + \alpha_1/R + \ldots \tag{10.2.15}$$

其中，

$$\alpha_1 = \frac{4\beta}{\pi}\sum_1^\infty \frac{f_n''(0)}{(2n-1)^2} \tag{10.2.16}$$

由 $f_1 = 1/2(f_0 + \eta f_0')$ 可知 $f_1''(0) = 0.498, f_2, \ldots, f_9$ 已由 Howarth 和 Tani 用数值积分得到，它们分别为： 2.041, 3.177, 4.083, 5.010, 5.800, 6.570, 7.290, 7.936. 当 n 取 10 至 14 时，可用渐近分析结果

$$f_n''(0) \sim \frac{\Gamma(1/3)(n-1)}{\Gamma(2/3)(3\alpha)^{1/3}(n-3/4)^{1/3}} \tag{10.2.17}$$

更高阶函数的值可以用 ζ 函数进行级数补全，这样，修正的阻力系数由下式计算：

$$\alpha_1 = \frac{4\beta}{\pi}\sum_1^9 \frac{f_n''(0)}{(2n-1)^2} + \frac{4\beta}{\pi}\sum_{10}^{14} \frac{\Gamma(1/3)(n-1)}{\Gamma(2/3)(3\alpha)^{1/3}(n-3/4)^{1/3}(2n-1)^2}$$
$$+ \frac{\beta\Gamma(1/3)}{\pi\Gamma(2/3)(3\alpha)^{1/3}}[\zeta(4/3) - \sum_1^{14}\frac{1}{n^{4/3}}] \tag{10.2.18}$$

上式中的 $\zeta(4/3)$ 可以如 9.1 节中的方法进行计算. 最后，我们得到 $\alpha_1 = 4.12$, 这个阻力修正公式可以适用于 $R = 15$ 时，同实验符合很好 (见图 10.2.1).

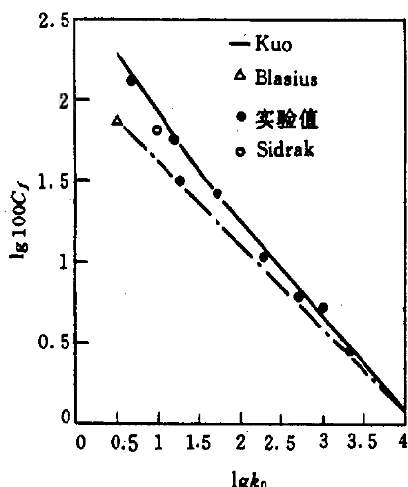


图 10.2.1　平板粘性阻力系数理论与实验比较

应当指出，更高阶的近似在前缘附近有更强的奇性，其阻力积

分是发散的，就是在这个问题的研究中，Kuo(1953) 提出后来为钱学森 (1956) 命名的 PLK 方法，克服了前缘奇异性的困难.

现在，我们来看圆球绕流的粘性阻力系数. 这是一个经典的问题. Stokes(1851) 首先得到首项，Oseen(1910) 得到第二项，Goldstein(1929) 计算到第六项，Van Dyke(1970) 延伸到 24 项. 结果为

$$C_D = \frac{12}{R}\sum_{n=0}^{23} C_n(R/4)^n \tag{10.2.19}$$

这里，R 是以直径为尺度的 Reynolds 数. 尽管已经得到一定长度的级数，但当 R 为 4 以上时，精度很低. 原来上述级数在 $R_0 = -4.18172$ 处有一个非物理的奇点，限制了级数的适用范围. 这里我们采用几种方法来改进级数性态. 首先就会想到 Euler 变换

$$\epsilon = \frac{R}{R+R_0}$$

这时，阻力公式变为

$$C_D = \frac{12}{R}\epsilon^{-1}\sum_{n=0}^{23} D_n\epsilon^n \tag{10.2.20}$$

可以用 Pade 近似于级数 (10.2.19)，一般取 $M = N + 1$，比如 R_{12} 的表达式为

$$C_D = \frac{R_0 + (1 + 3/16R_0)R + (3/16 - 19/1280R_0)R^2}{R(R+R_0)} \tag{10.2.21}$$

类似地可以计算 $R_{N,N+1}$，该序列在正确值附近摆动，迅速收敛. 计算表明，在 Reynolds 数 1 到 50 间，可比 Euler 变换增加一位精度. 如果把 Pade 近似应用于经 Euler 变换后的级数 (10.2.20)，结果还可以改进.

最后，根据级数奇性的分析，我们可以用级数补全法将级数 (10.2.20) 增补成无限级数，应增补的项为

$$D_N\left(1 - \frac{R}{R+R_0}\right)^{1/3} \tag{10.2.22}$$

并要求式中 $R/(R+R_0)^{23}$ 项的系数与级数 (10.2.20) 中的相应项相等来确定 D_N. 这个方法甚至使阻力公式可应用到 $R=\infty$ 时 (但仍为层流), $C_D=1.06$, 与 Stewartson 的结果一致. 由此可见, 我们从仅适用于小 Reynolds 数的摄动解出发, 经过级数延伸, 改进, 使结果可应用于大 Reynolds 的情况. 而本节的第一个例子的情况刚好相反, 它是从适用于大 Reynolds 数的边界层理论出发, 求出其高阶近似, 使结果可应用于 Reynolds 数低到 15 的情况. 由此可见级数改进使原来不可能获得分析解的参数范围的问题得到了解决, 其作用实是令人惊叹的!

应当指出, 圆球阻力系数的摄动级数是从 Oseen 近似出发得到的正则摄动解. 如果我们直接从 Navier-Stokes 方程出发, 就会在展开式中出现对数项, 如

$$C_D=\frac{6\pi}{R}(1+\frac{3}{8}R+\frac{9}{40}R^2\log R+0.1333R^2$$

$$+\frac{81}{320}R^3\log R-0.0034R^3+\ldots) \qquad (10.2.23)$$

这是奇异摄动问题. 但目前级数改进的各种方法对它还不适用, 需进一步研究. 这也说明现有的理论还是有待于发展.

10.3 加速壁面槽道中的流动

曾几何时, 人们对性质良好的级数不收敛感到迷惑不解, 这是因为我们仅把目光限于实数域的缘故. 如果放到参数的复平面上去研究, 问题就迎刃而解. 我们发现, 原来在实轴以外也可能有奇点. 上节给出奇点在负实轴的例子, 本节给出在实轴外奇点的例子. 存在实轴外奇点首先的迹象是符号型. 比如均匀流绕正弦壁的有势流动, 在 15 项后, 变成 +−+ 符号型; Hancock 研究的角区强迫层流流动在第七项后, 出现 +++− 的符号型; Cowley 给出的了脉冲起动的圆柱层流绕流位移厚度的级数具有 +++− 的符号型; 对初始圆形气泡在理想液体中上升运动, Baumel 发现第二项后有 +−+−+−+−

的符号型 $11\frac{2}{3}$ 周期，再转为 ++−+−+−+− 等等 (Van Dyke 1990). 所以，摄动级数可能有各种符号型. 这里，我们要给出一个奇点在实轴以外，具有周期三符号型的例子. 这就是表面加速平面槽道中的流动. 它也是细长液滴或气泡中流动的模型 (Brady 1981). 假定槽道壁面的速度为 Ex, 宽度为 $2a$, 流体介质粘度为 μ, 密度为 ϱ. 我们可按下述方法无量纲化

$$(u',v')=Ea(u,v),(x',y')=a(x,y),\rho'=\varrho\rho,p'=\mu ap \tag{10.3.1}$$

由 Bernoulli 积分可知，压力取如下形式表达式：

$$p=p_0(y)+\frac{1}{2}\beta x^2 \tag{10.3.2}$$

这个问题显然存在相似解

$$u=xf'(y),\quad v=-f(y) \tag{10.3.3}$$

代入 Navier-Stokes 方程可以得到

$$f'''-\beta=R[f'^2-ff''] \tag{10.3.4}$$

边界条件是

$$f(0)=f'(0)=f(1)=0,f'(1)=1 \tag{10.3.5}$$

其中 $R=\dfrac{\rho Ea^2}{\mu}$ 是 Reynolds 数. y 方向的动量方程只能用来确定压力垂直分布

$$p_0'(y)=f''+Rff' \tag{10.3.6}$$

尚需确定 x 方向上的压力系数，所以上述三阶方程有 4 个边界条件. 考虑到对称性，只需研究 $0\le y\le a$ 区域即可.

假定该问题的摄动解有如下形式：

$$f(y;R)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(y)(\frac{R}{S})^n \tag{10.3.7}$$

可以得到

$$\beta(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\frac{R}{S})^n \tag{10.3.8}$$

其中 S 为 34 避免计算溢出. Brady(1981) 得到了该级数的 29 项. 他还在 $R=0$ 到 ∞ 的范围内用数值积分求解, 发现在 $R=310$ 处有另两个分岔解. 从速度廓线可见, 它们分别是有不同的流动图案和压力系数. 根据该级数的符号型, 它不仅有短周期 3, 而且还有长周期 33, 我们假定摄动级数有如下形式:

$$f=\frac{1}{2}A\left[e^{-i\delta}(1-\frac{z}{re^{i\theta}})^{\alpha}+e^{i\delta}(1-\frac{z}{re^{-i\theta}})^{\alpha}\right] \tag{10.3.9}$$

按 Li(1982) 或 Van Dyke(1990) 的方法可确定奇点在辐角 116.326° 处, 初始相移为 0.92425. 于是可用推广的 Domb-Sykes 曲线图外推 (Li 1982), 得到收敛半径为 r=33.72 以及 A=-27.6.

在进行了级数的奇点分析以后, 我们便可以设法来改进级数. 这里采用三种方法: 级数补全法不成功. 即使 $R=68$ 时, 结果在正确指附近振荡, 且振幅不断增加; 然后, 我们计算 $\beta(R)$ 的 Pade 近似 $[N/N]$, 除了 [11/11], [18/18] 出现伪极点外, 看来, Pade 近似使级数性态有很大改善; 最后, 我们用 Euler 变换

$$\epsilon=\frac{R}{R+R_0} \tag{10.3.10}$$

这里取 $R_0=R\cos\theta_0=15$, 其 50 项的结果与 Pade 近似 [12/12], [17/17] 的结果不可分辨. 从以上分析可以看到, 对应周期 3 的符号型, Brady 级数在复平面上有一对复共轭奇点. 原级数 $R=20$ 左右, 该级数迅速偏离数值解. 用级数改进的方法, 至少使级数适用范围扩大 10 倍以上. 同时, 在 $R=\infty, \beta=-0.6$, 与数值解 $\beta=-1.0$ 尚有差异. 所以, 级数改进的理论还有待于发展和完善.

习　　题

10.1 Hoffman(1974) 把 Jansen-Reyleigh 展开延伸到 M^{16} 阶, 当

$\Gamma = 1.4$ 时，最大物面速度为

$$\frac{q_{\max}}{U_\infty} = 2.0000 + 1.16667M^2 + 2.57833M^4 + 7.51465M^6 25.59041M^8$$
$$+96.26329M^{10} + 387.92345M^{12} + 1646M^{14} + 7459M^{16} + \ldots$$

试用各种方法分析级数性质，估算临界马赫数. 比较各种方法的优缺点.

10.2　考察一端绝热，一端恒温矩形肋有辐射时的传热，满足下列方程：

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \epsilon(\theta^4 - \theta_s^4) = 0$$
$$x = 0, \frac{d\theta}{dx} = 0; x = 1, \theta = 1$$

试用手工或计算代数软件推导逐阶方程，边界条件和解.

10.3　在 10.2 节中，应用公式 (10.2.18)

$$\alpha_1 = \frac{4\beta}{\pi}\sum_1^9 \frac{f_n''(0)}{(2n-1)^2} + \frac{4\beta}{\pi}\sum_{10}^{14} \frac{\Gamma(1/3)(n-1)}{\Gamma(2/3)(3\alpha)^{1/3}(n-3/4)^{1/3}(2n-1)^2}$$
$$+ \frac{\beta\Gamma(1/3)}{\pi\Gamma(2/3)(3\alpha)^{1/3}}[\zeta(4/3) - \sum_1^{14}\frac{1}{n^{4/3}}]$$

确定系数 C_N，用级数补全法计算修正的阻力系数 α_1，画出阻力系数与 Reynolds 数的关系图，同实验进行比较.

10.4　小 Reynolds 数下，绕圆球的粘性流动阻力系数为

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 a^2} = \frac{6\pi}{R}(1 + \frac{3}{8}R - \frac{19}{120}R^2 + \frac{71}{2560}R^3$$
$$- \frac{30179}{2150400}R^4 + \frac{122519}{17203200}R^5 + \ldots)$$

试用 10.2 节中的方法来改进级数，比较用延伸的级数与本题的级数之结果，讨论延伸级数的作用.

10.5 请用 10.3 节中的方程与边界条件

$$f''' - \beta = R[f'^2 - ff'']$$

边界条件是

$$f(0) = f'(0) = f(1) = 0, f'(1) = 1$$

将 $f(y;R)$ 展开成 R 的摄动级数，导出各阶方程与边界条件，从而尽可能地计算压力梯度以 Reynolds 数为参数的摄动级数，分析其符号型.

附　录

A.1 反函数的 Lagrange 公式

定理: 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，即

$$w=f(z)=w_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

其中 $a_1\neq 0$, 则必存在唯一的反函数 $z=\varphi(w)$ 在 $|w-w_0|\leq\delta$ 内单值解析．如果 $F(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，即

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

那么

$$F[\varphi(w)]=F(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{F'(\zeta)\left(\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n\right\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n \tag{A.1.1}$$

推论: 若 $F(z)\equiv z$, 那么

$$\varphi(w)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{\left(\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n\right\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n \tag{A.1.2}$$

在这里，我们仅证明推论．

由留数定理可知

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=N-P \tag{A.1.3}$$

其中 N 为零点个数， P 为极点个数，其实

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)}&=\frac{1}{2\pi i}\oint d\ln f(\zeta)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint d\ln|f(\zeta)|d\zeta+\frac{1}{2\pi}\oint dArgf(\zeta)\end{aligned} \tag{A.1.4}$$

说明积分值代表围绕奇点之圈数，由此可得推论

推论 1:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \varphi(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta=\sum_{k=1}^{N}n_k\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{P}p_k\varphi(b_k) \qquad \text{(A.1.5)}$$

推论 2:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta=\sum_{k=1}^{N}n_k a_k-\sum_{k=1}^{P}p_k b_k \qquad \text{(A.1.6)}$$

推论 1,2 中 a_k, b_k 代表 $f(\zeta)$ 取 w 为零点或极点的位置.

如果围道充分小，在其内部只有一个点取 $f(z)=w$, 那么由推论 2 可得

$$z=\varphi(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta \qquad \text{(A.1.7)}$$

因为

$$\begin{aligned} w&=f(z)=w_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \\ z&=\varphi(w)=z_0+b_1(w-w_0)+b_2(w-w_0)^2+\cdots \end{aligned} \qquad \text{(A.1.8)}$$

代入上式之导数

$$\begin{aligned} \varphi'(w)&=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta)-w)^2}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\oint \zeta\frac{d}{d\zeta}(f(\zeta)-w)^{-1}d\zeta \\ &=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\zeta}{f(\zeta)-w} \\ &=\frac{1}{2\pi i}\oint \left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n\right]\frac{d\zeta}{f(\zeta)-w_0} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} nb_n&=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\zeta}{(f(\zeta)-w_0)^n}=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\left(\dfrac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n}{(\zeta-z_0)^n}d\zeta \\ &=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)-w_0}\right)^n\Bigg|_{\zeta=z_0} \end{aligned} \qquad \text{(A.1.9)}$$

所以

$$b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left[\frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - w_0}\right]^n\Bigg|_{\zeta=z_0} \tag{A.1.10}$$

定理证毕 (Copson 1955)

A.2 Γ 函数

定义：沿正半轴 t 取积分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{A.2.1}$$

在 $\mathrm{Re}z > 0$ 处收敛，称为 Γ 函数，它有如下性质

$$1^\circ \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A.2.2}$$

$$2^\circ \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{A.2.3}$$

$$3^\circ \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{A.2.4}$$

其中性质 1° 不难由分部积分导出，由此可得正整数 $\Gamma(n+1) = n!$. 同时可知负整数处为一阶极点外全平面解析. 由性质 2 可以获得所有半整数处的 Γ 函数的值. 由 Poisson 积分

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\Gamma(\frac{1}{2})$ 与 Poisson 积分仅差一常数便可导出 2°.

依靠 Γ 函数，我们可以计算如下定积分 (Copson 1995)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1} x \cos^{2\beta-1} x dx = \frac{\Gamma(\alpha)F(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{A.2.5}$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{A.2.6}$$

A.3 矩阵函数

为了方便微分方程组的求解，我们引进矩阵函数的概念.

首先给出矩阵幂函数与多项式的计算方法. 由于已有矩阵乘法之运算，不难计算矩阵幂函数 A^n 及矩阵多项式

$$P(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_nA^n \tag{A.3.1}$$

其中 E 为单位矩阵， $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为系数，如果矩阵 A 可化为 Jordan 块，即

$$A = T^{-1}BT \tag{A.3.2}$$

其中

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k \tag{A.3.3}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{A.3.4}$$

式中 $\oplus$ 为直和运算记号，每个 Jordan 块为 n_i 阶的，可以得如下公式

$$P(A) = T^{-1}P(B)T \tag{A.3.5}$$

其中

$$P(B) = P(B_1) \oplus P(B_2) \oplus \cdots \oplus P(B_k)$$

$$P(B_i) = \begin{pmatrix} P(\lambda_i) & P'(\lambda_i) & \frac{1}{2}P''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} & P^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & P(\lambda_i) & P'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!} & P^{(n_i-2)}(\lambda_i) \\ & & P(\lambda_i) & \cdots & & \\ & & & & & \cdots P(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

(A.3.6)

下面我们来定义矩阵函数 $f(A)$

1° Jordan 块矩阵定义，若矩阵 A 可如 (3.2) 那样分解，那么

$$f(A) = T^{-1} f(B) T \tag{A.3.7}$$

其中

$$f(B) = f(B_1) \oplus f(B_2) \oplus f(B_k) \tag{A.3.8}$$

$$f(B_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n_i-2)!} f^{(n_i-2)}(\lambda_i) \\ & & f(\lambda_i) & \\ & & & \cdots f(\lambda_i) \end{pmatrix} \tag{A.3.9}$$

2° 由矩阵多项式定义.

由式 (3.9) 可知，矩阵函数 $f(A)$ 完全由 A 的 Jordan 型及函数 $f(\lambda)$ 在 λ_i 上的值和相应于阶导数值 (取决于 Jordan 块的阶数) 确定，如果有一多项式 $P(A)$ 与 $f(A)$ 有相同的谱 (即相同的函数值与相应的高阶导数值)，那么可以定义

$$f(A) = P(A) \tag{A.3.10}$$

这里 $P(\lambda)$ 的形式可用 Lagrange - Sylvester 插值公式，譬如，对单根情况

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1 E)\cdots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\cdots(A-\lambda_n E)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)} f(\lambda_k) \tag{A.3.11}$$

3° 由矩阵幂级数定义. 若

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \tag{A.3.12}$$

在 $|z| < R$ 内是收敛的解析函数，那么无穷矩阵幂级数

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k A^k \tag{A.3.13}$$

在 $\rho(A) < R$ 内收敛，其极限值就是矩阵函数 $f(A)$, 其中 $\rho(A)$ 为谱半径， $\rho(A) = \max(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

4° 由 Dunford-Taylor 积分定义

由于

$$\frac{1}{zE - A} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^n} \tag{A.3.14}$$

在 $|z| > \rho(A)$ 内收敛，可以证明

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{zE - A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n = f(A) \tag{A.3.15}$$

所以，上述积分就是矩阵函数 $f(A)$, 它是复变函数中 Cauchy 公式的推广

由上述定义，可以得到如下性质：

$$\begin{aligned} Af(A) &= f(A)A \\ (f_1 + f_2)(A) &= f_1(A) + f_2(A) \\ (f_1 f_2)(A) &= f_1(f_2(A)) \end{aligned} \tag{A.3.16}$$

并且，矩阵函数可像普通函数一样进行运算，如 (Sirovich 1971)

$$\begin{aligned} &\sin^2 A + \cos^2 A = E \\ &e^{iA} = \cos A + i \sin A \\ &\frac{d}{dt} e^A = e^A \frac{dA}{at} \qquad \frac{dA^{-1}}{at} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A \end{aligned} \tag{A.3.17}$$

A.4 差分方程

这里介绍差分运算与差分方程的一些基本概念：

1. 差分运算，即离散导数，定义如下：

$$\begin{aligned} Da_n &= a_{n+1} - a_n \\ D^2 a_n &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \\ &\cdots \\ D^k a_n &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j C_k^j a_{n+k-j} \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

2. 逆差分运算，即离散积分

$$b_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \tag{A.4.2}$$

3. 差分方程，即求离散数列 a_n 的表达式满足下述方程

$$D^{(N)}a_n = F\left[n, a_n, Da_n, \cdots, D^{(N-1)}a_n\right] \tag{A.4.3}$$

或

$$a_{n+N} = G\left[n, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+N-1}\right] \tag{A.4.4}$$

其通解亦依赖于 n 个常数．给定 $a_0, a_1, \cdots, N$ 个接续的值称为初值问题，在 $n_1 \le n \le n_2$ 间给出 N 个条件称为边值问题，对齐次方程的边值问题，要确定特征值 λ 才能有非零解，称为特征值问题，下面给出常差分方程的求解方法：

1° 一阶齐次线性差分方程．

$$a_{n+1} = p(n)a_n \tag{A.4.5}$$

其解为

$$a_n = a_1 \prod_{j=1}^{n-1} p(j) \tag{A.4.6}$$

2° 一阶非齐次差分方程

$$a_{n+1} = p(n)a_n + q(n) \tag{A.4.7}$$

由于上式可化为如下差分方程

$$\frac{a_{n+1}}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} - \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)} = \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \tag{A.4.8}$$

a_n 之特解为

$$\frac{a_n}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} p(j)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q(k)}{\prod\limits_{j=1}^{k} p(j)} \tag{A.4.9}$$

所以，非齐次方程通解为

$$a_n = \prod_{j=1}^{n-1} p(j) \left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q(k)}{\prod\limits_{j=1}^{k} p(j)} \right] \tag{A.4.10}$$

3° 常系数差分方程

$$a_{n+N} + p_{N-1} a_{n+N-1} + \cdots + p_0 a_n = 0 \tag{A.4.11}$$

令 $a_n = r^n$ 导出特征方程

$$P(r) = r^N + p_{N-1} r^{N-1} + \cdots + p_0 = 0 \tag{A.4.12}$$

如果特征方程仅有单根，其解为

$$r_1^n, \quad r_2^n, \cdots, \quad r_N^n \tag{A.4.13}$$

如果特征方程有单根，其解为

$$r_1^n, \ n r_1^n, \ n^2 r_1^n, \cdots; r_2^n, \ n r_2^n, \cdots \tag{A.4.14}$$

4° Euler 方程

$$\frac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)} a_n^{(N)} + P_{N-1} \frac{\Gamma(n+N-1)}{\Gamma(n)} a_n^{(N-1)} + \cdots + p_0 a_n = 0 \tag{A.4.15}$$

令 $a_n = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$, 由于

$$a_n^{(1)} = \frac{r}{n} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$$

$$a_n^{(2)} = \frac{r(r-1)}{n(n+1)} \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$$

$$a_n^{(N)} = \frac{r(r-1)\cdots(r-N+1)}{\Gamma(n+r)/\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$$

可得特征方程

$$r(r-1)\cdots(r-N+1)+p_{N-1}r(r-1)\cdots(r-N+2)$$
$$+\cdots+p_1r+p_0=0 \tag{A.4.16}$$

若上述方程有单根，其解为

$$\frac{\Gamma(n+r_1)}{\Gamma(n)},\quad \frac{\Gamma(n+r_2)}{\Gamma(n)},\quad \cdots,\quad \frac{\Gamma(n+r_N)}{\Gamma(n)} \tag{A.4.17}$$

若上述方程有重根，其解为

$$\frac{\Gamma(n+r_1)}{\Gamma(n)},\quad \phi_1(n)\frac{\Gamma(n+r_1)}{\Gamma(n)},\quad \phi_2(n)\frac{\Gamma(n+r_1)}{\Gamma(n)},\quad \cdots \tag{A.4.18}$$

其中

$$\phi_1(n)=\frac{d}{dz}\Gamma(z)\,|_{z=n+r_1}/\Gamma(n)$$
$$\phi_2(n)=\frac{d^2}{dz^2}\Gamma(z)\,|_{z=n+r_1}/\Gamma(n)$$

由于某些差分方程可以对应于某个微分方程级数解 $F(x)$ 的系数递推公式，所以可以由对应微分方程之解 $F(x)$ 来求差分方程的解，这种方法叫母函数方法.

[**例 A.4.1**]

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0 \tag{A.4.19}$$

之母函数满足方程:

$$F''-2F'-3F=0$$

得: $F(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$, 所以.

$$a_n=\frac{c_1}{n!}3^n+\frac{c_2}{n!}(-1)^n \tag{A.4.20}$$

5° 非线性方程，通常可用变换方法，化为便于求解的差分方程.

[**例 A.4.2**] $a_{n+2}=a_{n+1}^2/a_n$, 取对数

$$\ln a_{n+2}-2\ln a_{n+1}+\ln a_n=0 \tag{A.4.21}$$

所以

$$a_n = e^{C_1 n + C_2} \tag{A.4.22}$$

[例 A.4.3]　$a_{n+1} = 4a_n^3 - 3a_n \quad (|a_n| \le 1)$
可令 $a_n = \cos\theta_n$，由三倍角公式导出 $\theta_{n+1} = 3\theta_n$，$\theta_n = 3^n\theta_0$，其解为 (Bender et al. 1978)

$$a_n = \cos(3^n \cos^{-1} a_0) \tag{A.4.23}$$

A.5 Hadamard 有限部分

若 $\varepsilon \to 0$ 时，有渐近展开

$$f(\varepsilon) \sim \sum_0^\infty a_n f_n(\varepsilon) \tag{A.5.1}$$

存在最小的 n_0，使 $n > n_0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_{n_0}(\varepsilon) \neq \infty$，那么

$$\text{fin}\, f(\varepsilon) = a_{n_0} \lim_{\varepsilon\to 0} f_{n_0}(\varepsilon) \tag{A.5.2}$$

[例 A.5.1]　$\text{fin} \sin\varepsilon/\varepsilon^3 = -\dfrac{1}{6}$

[例 A.5.2]　$⨍_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^{3/2}} = \text{fin} ⨍_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^{3/2}} = -2(b-a)^{-\frac{1}{2}}$

参 考 文 献

[1] Aziz.A., Na, T.Y. (1984), Perturbation Methods in Heat Transfer, London: Hemisphere Publishing Co. (有中译本).

[2] Baker, G.A.(1965), The theory and applications of Pade Approximant methods, in Brueckner, K.A., ed., Advances in Theoretical Physics, New York: Academic Press, 1–58.

[3] Bender, C.M. and Orszag, S.A.(1978), Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, New York: McGraw-Hill.(有中译本)

[4] Benjamin, T.B. and Feir, J.E.(1967), The disintegration of wave trains on deep water, J.Fluid Mech., **27**: 417–430.

[5] Bliven, L.F.et al.(1986), Experimental study of the influence of wind on Benjamin -Feir sideband instability, J Fluid Mech., **162**: 237–260.

[6] Bogoliubov, N.N. and Mitropolski(1961), Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscilation. New York: Gordon and Breach.

[7] Brady, J.F. and Acrivos, A.(1981), Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. J. Fluid Mech., **112**: 127–150.

[8] Bush, Alan W.(1992), Pertubation Methods for Engineers and Scientists, Boca Raton: CRC Press.

[9] Chien, W.C.(1948), Asymptotic behaviour of a thin clamped circular plate under uniform pressure at very large deflection, Sci. Rep., Tsihua Univ.**5**(1): 1–24.

[10] 钱伟长 (1981), 奇异摄动理论及其在力学中的应用, 北京: 科学出版社.

[11] Copson, E.T.(1955), The Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford: Clarendon Press.

[12] Copson, E.T.(1965), Asymptotic Expansion, Cambridge: Cambridge University Press.

[13] 戴世强 (1983), 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用, 中国科学, **A26**: 1007–1017.

[14] Denardo, B.et al.(1990), Observation of a kink soliton on the surface of a liquid, Phys. Rev. Lett., **64**: 1518–1521.

[15] Domb, C. and Sykes, M.F.(1957), on the susceptibility of a ferromagnetic above the Curie point, Proc.Roy.Soc.London, **A240**: 214–218.

[16] Donelan, M.A. and Hui, W.H.(1990), Mechanics of Ocean surface waves, in Geernaert, L. and Plant, W.J., eds., Surface Waves and Fluxes, **1**: 209–246.

[17] Drazin, P.G., Reid, W.H.(1981), Hydrodynamic Stability, Cambridge: Cambridge University Press.(有中译本)

[18] Erdlyi, A.(1956), Asymptotic Expansion, New York: Dover.

[19] Fox, P.A.(1955), Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics, J. Math. Phys., **34**: 133–155.

[20] Fraenkel, L.E.(1969), On the method of matched asymptotic expansions, Part:1–3, Proc. Camb. Phil. Soc., **65**: 209–231, 233–261, 263–284.

[21] Goldstein, S.(1929), The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers, Proc. Roy. Soc., **A123**: 225–235.

[22] Goldstein, S.(1956), Flow of an incompressible viscous fluid along a

semi-infinite flat plate, Tech. Rep. Eng. Res. Inst. Univ. Calif., No. HE-150-144.

[23] Graves-Morris, P.R. (1973), Pade Approximations and Their Applications, New York: Academic Press.

[24] Grimshaw, R.(1978), Long nonlinear internal waves in channels of arbitrary cross-section, J.Fluid Mech., **86**: 415–431.

[25] Guttmann, A.J.(1989), Asymototic Analysis of Power-Series Expansions, Australia: Academic Press.

[26] Hara, T, Mei, C.C.(1991), Frequency downshift in narrow-banded surface waves under the influence of wind, J. Fluid Mech., **230**: 429–478.

[27] Heading, J.(1962), An Introduction to Phase Integral Methods, London: Methuen and Co..

[28] Hogan, S.J(1981), Some effects of surface tension on steep water waves, J. Fluid Mech., **110**: 381–410.

[29] Hui, W.H. and Tenti, G.(1982), A new approach to steady flow with free surface, ZAMP, **33**: 569–589.

[30] Imai, I.(1957), Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate, J.Aeronaut.Sci., **24**: 155–156.

[31] Jenson, V.G.(1959), Viscous flow around a sphere at low Reynolds numbers, Proc. Roy. Soc. London, **A249**: 346–366.

[32] 加藤敏夫等 (1965), 微分方程的近似解法, 上海: 上海科学技术出版社.

[33] Jonson, R.S.(1973), On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, Proc. Cam. Phil. Soc., **73**: 183–203.

[34] Kaplun, S.(1957), Low Reynolds flow past a circular cylinder, J. Math. Mech.,**6**: 595–603.

[35] Kaplun, S. and Lagerstrom, P.A.(1957), Asymptotic expansion of Navier- Stokes solutions for small Reynolds numbers, J. Fluid Mech., **6**: 585–593.

[36] Keller, J.B.(1958), A geometric theory of diffraction, calculus of variation, and its applications, Proc. Symp. Appl. Math., **8**: 27–52.

[37] Keller, J.B. and Ting, L.(1966), Periodical vibration of systems governed by nonlinear partial differential equations, Comm, Pure Appl. Math., **19** :371–420.

[38] Kevorkian, J. and Cole, J.D.(1981), Perturbation Methods in Applied Mathematics, New York: Springer-Verlag.

[39] Kline, M.(1972), Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York: Oxford Universiy Press, **4**: 1–40, 184–213.(有中译本)

[40] Krylov, N. and Bogoliubov, N.N.(1947), Introduction to Nonlinear Mechanics, Princeton, N.J.: Princeton University Press.

[41] Kuo, Y.H.(1953), On the flow of an incompressble viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers, J.Math.Phys., **32**: 85–101.

[42] Kwok, Y.K. and Sirovich, L.(1989), On some aspects of the transonic controversy, SIAM J. Appl.Math.,**47**(2): 279–295.

[43] Lakin, W.D. et al.(1978), Approximations to eigenvalue relation for the Orr-Sommerfeld problem, Phil. Trans. Roy. Soc., **A289**: 347–371.

[44] Larraza, A. and Putterman, S.(1984), Theory of non-propagating surface wave solitons, J. Fluid Mech., **148**: 443–449.

[45] 李家春 (1981a), 流动稳定性和渐近方法，力学与实践 **3** (4): 21–26.

[46] 李家春 (1981b), 摄动级数收敛性的改进及其应用，见钱伟长主编，奇异摄动理论及其在力学中的应用，北京：科学出版社. 263–309.

[47] 李家春 (1982a), 摄动级数的奇性判别法, 中国科学, **A25**(6): 504–510.

[48] 李家春 (1982b), Orr-Sommerfeld 方程的格林函数和积分方程方法，应用数学与力学， **3**(5): 597-604.

[49] 李家春 (1983a), 分层流中的瞬变波，力学学报， **15**(6): 611–622.

[50] 李家春 (1983b), 非线性流动稳定性理论，力学进展， **13**(3): 301–310.

[51] Li, J.C.(1983c), A new approach to the stability of plane Poiseuille flow, Proceedings of the 2nd ACFM, Beijing:Science Press, 192–197.

[52] 李家春, 赵大刚 (1985), 复变量广义艾瑞函数, 应用数学与力学， **6**(11): 969–975.

[53] 李家春 (1986), 深水波理论的新进展，力学进展， **16**(2): 175–182.

[54] Li, J.C., Hui.W.H. and Donelan, M.A.(1988a), Effects of velocity shear on the stability of surface wave trains(2) in "Nonlinear Water Waves", eds. by Morikawa. K and Maruo. New York:Springer-Verlag, 512–520.

[55] 李家春 (1988b), 关于渐近分析的若干定理，中国科学， A31(5): 478-484.

[56] 李家春 (1988c), 用符号计算毛细重力波的六阶解，力学与实践，**10**(2): 37-39.

[57] 李家春 (1990), 郭永怀与摄动理论，纪念郭永怀文集，科学出版社. 116-123.

[58] Li, J.C, Allen, T.Chwang(1994), Effects of nonuniform current on wave fields, Proceeings of ISOPE'94, Osaka, Japan, **3**: 129-132.

[59] Libby, P.A.(1965), Eigenvalues and norms arising in perturbations about the Blasuis solution, AIAA J., **3**: 2164-2165.

[60] Lighthill, J.(1949), A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, Phylos.Mag., **40**: 1179-1201.

[61] Lin, C.C.(1954), On a perturbation theory based on the method of characteristics, J. Math. Phys., **33**: 117-134.

[62] Lin, C.C.(1955), The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press.

[63] Lin, C.C. and Rabenstein, A.L.(1960), On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order (1) existence of regular formal solutions, Trans. Amer. Math. Soc., **94**: 24-57.

[64] Lin, C.C. and Rabenstein, A.L.(1969), On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order(2) existence of solutions, which are approximated by the formal solutions, Studies in Appl. Math., **48**: 311-340.

[65] Longuet-Higgins, M.S.(1989), Monopole emmission of sound by asymmetric bubble oscillation, Part 1, normal mode, J.Fluid Mech., **201**: 525-541.

[66] Longuet-Higgins, M.S.(1989), Monopole emmission of sound by asymmetric bubble oscillation, Part 2, an initial-value problem, J.Fluid Mech.**201**: 543-565.

[67] Ludwig, D.(1967), Uniform asymptotic expansions at a caustic, Comm. Pure Appl. Math., **19**: 215-250.

[68] Madsen, O.S. and Mei, C.C.(1969), The transformation of a solitary

wave over an uneven bottom, J. Fluid Mech., **39**: 781–791.

[69] Mei, C.C. and Zhou, X.C.(1991), Parametric resonance of a spherical bubble, J.Fluid Mech., **229**: 29–50.

[70] Messiter, A.F.(1970), Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate, SIAM J.Appl.Math., **18**: 241–257.

[71] Miles, J.W.(1980), Solitary waves, Ann.Rev.Fluid Mech.,**12**: 10–43.

[72] Miles, J.W.(1984), Parametrically excited solitary waves, J.Fluid Mech., **148**: 451–460.

[73] Nam S.(1990), Higher-order boundary-layer solution for unsteady motion of a circular cylinder, J.Fluid Mech., **214**: 89–119.

[74] Nayfey, A.H.(1973), Perturbation Methods, New York: John Wiley.(有中译本)

[75] Nayfey, A.H. and Mook, D.T.(1979), Nonlinear Oscilation, New York: John Wiley.(有中译本)

[76] [Ono, H.(1972), Nonlinear wave modulation in inhomogeneous media, J. Phys. Soc. Japan, **37**: 1668–1672.

[77] Oseen, O.W.(1910), Ueber die Stokes'sche formel and uber eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik, Ark. Math. Astronom. Fys., **6**(29).

[78] Peters, A.S.(1966), Rotational and irrotational solitary waves in a channel with arbitrary cross-section, Comm. Pure Appl.Math., **19**(4): 445.

[79] Plesset, M.S. and Prosperetti, A.(1977), Bubble dynamics and cavitation, Ann.Rev.Fluid Mech., **9**: 145–185.

[80] Poincaré, H.(1882), Les Methodes Nouvelle de la Mecanique Celeste, 1, Paris. (有英译本)

[81] Prandtl, L.(1904), Uber Flussigkeiten bei sehr kleiner reibung, Vehr 3, Internat. Math. Math. Kongr., Heidelberg: 481–491.

[82] Proudman, I. and Pierson, J.R.A.(1957), Expansons at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder, J.Fluid Mech., **2**: 237–262.

[83] Saffman, P.G.(1993), Effects of wind and water shear on wave instability, in Theoretical and Applied Mechanics, Bodner et al.(Eds.) ,

Elsveier Science Publishers. 133–141.

[84] Shanks, D.(1955), Nonlinear transformation of divergent and slowly convergent sequences, J. Math.Phys.,**34**: 1–42.

[85] Sirovich, L.(1971), Techniques of Asymptotic Analysis, New York: Springer-Verlag.

[86] 宋涛，李家春 (1988), Stokes 波高阶谐波系数的递推数值计算，应用数学与力学， **9**(7): 577–592.

[87] 宋涛，李家春 (1989), 表面张力作用下深水波的高阶摄动解，力学学报， **21**(2): 145–153.

[88] Stokes G.G.(1847), On the theory of oscillatory waves, Trans. Cambridge Phil. Soc. , **8**: 441–455.

[89] Stokes, G.G.(1851), On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Trans. Camb. Phil. Soc., **9**: 8–106.

[90] Titchmarsh, E.C.(1952), The Theory of Functions, Oxford University Press.

[91] Tsien, H, S.(1956), The Poincaré-Lighthill-Kuo method, Advan. Appl. Mech., **4**: 281–349.

[92] Van Dyke, M.(1974), Analysis and improvement of perturbation series, Quar. Jour. Mech. Appl. Mech., **27**: 423–440.

[93] Van Dyke M.(1975a), Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Annotated Edition, Stanford: Parabolic Press.(有中译本)

[94] Van Dyke, M.(1975b), Computer extension of perturbation series in fluid mechanics, SIAM J.Appl.Math., **28**: 720–734.

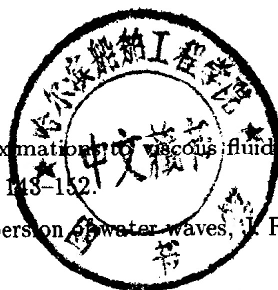
[95] Van Dyke, M.(1990), Fluid mechanics off the real axis, in Engineering Sciences, Fluid Mechanics, Yates G. ed., Singapore: World Scientific Publishing House. 355–366.

[96] 谢定裕 (1983), 渐近方法，北京：友谊出版公司.

[97] 王本仁，魏荣爵 (1986), 二模振荡激励下水槽中的孤立波，物理学报， **35**: 1547–1555.

[98] 王竹溪，郭敦仁 (1965), 特殊函数概论，北京：科学出版社.

[99] Wentzel, G.(1926), Eine verallgemeinerung der quantenbedingung fur die zwecke der wellenmechanik, Z.Phys., **38**: 518–529.



[100] Whitehead, A.N.(1889), Second approximation to viscous fluid motion, Quart. J. Pure Appl. Math., **23**: 143–152.

[101] Whitham, G.R.(1967a), Nonlinear dispersion of water waves, J. Fluid Mech., **27**: 399–412.

[102] Whitham, G.R.(1967b), Variational methods and applicaions to water wave, Proc. Roy. Soc. London, **A299**: 6–25.

[103] Whitham, G.R.(1974), Linear and Nonlinear Waves,London:John Wiley and Sons Inc. (有中译本)

[104] Wu, J., Keolian R., Rudnick I.(1984), Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, Phys.Rev.Lett., **52**: 1421–1424.

[105] 颜家壬，黄国翔 (1988), 矩形波导中二层流体界面上的非传播孤立波，物理学报， **37**: 874–880.

[106] 周显初 (1983), 缓变任意截面渠道中的非线性周期波和孤立波的分裂，中国科学， **A26**: 238–246.

[107] 周显初 (1986), 流动对孤立波演变的影响，中国科学， **A29**: 171–181.

[108] 周显初 (1987), 分层流中孤立波的分裂，中国科学， **A30**: 1071–1080.

[109] Zhou, X. and Grimshaw, R.(1989), The effect of variable currents on internal solitary waves, Dynamics of Atmos. and Oceans, **14**: 17–39.

[110] Zhou, X. and Cui, H.N.(1991), New parametric region for nonpropagating solitary waves, Chinese Phys. Lett., **8**(12): 629–632.

[111] 周显初，崔洪农 (1992), 表面张力对非传播孤立波的影响，中国科学， **A33**: 1269–1276.

[112] 周显初，梅强中 (1992), 气泡振动的非线性耦合模型，力学学报， **24**: 283–291.